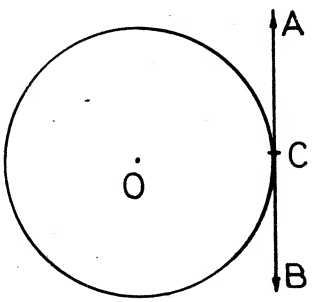
5-4 . **مماس** :- خط مستقیمی که همرای یک دایره فقط وفقط - یک نقطه مشترک داشته باشد مماس دایره ونقطه مشترک آنها بنام نقطه تماس یاد میگردد ویا نیم خط وقطعه خطی که یک قسمت خط مماس بوده ونقطه تماس درآن شامل باشد بنام مماس یاد میشود . درشکل (9 - 5) ، $\overleftrightarrow{AB}$ درنقطه C مماس دایره (O) است و C، نقطه تماس است .



شکل (9-5)

5-4-1 . **قضیه اول** :- شعاع دایره درنقطهٔ تماس بالای مماس عمود است .

معلوم :- دردایرهٔ (O) خط $\overleftrightarrow{PP'}$ درنقطه (T) ، آن مماس است .

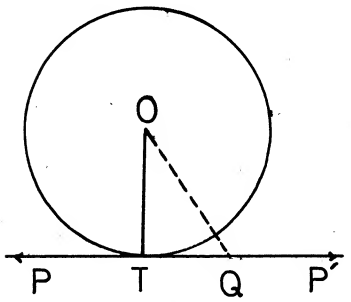
مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که : $\overline{OT}$ درنقطه T، بالای $\overleftrightarrow{PP'}$ عمود است .

ترسیم :- یک نقطه کیفی $\overleftrightarrow{PP'}$ مثلاً Q را به O وصل مینمائیم شکل (10-5) .

ثبوت :- دیده میشود که نقطه Q بالای دایره واقع نیست وطول $\overline{OQ}$

بزرگتر از طول شعاع دایره است یعنی :

$\overline{OQ} > \overline{OT}$



به همین ترتیب اگر هر نقطه دیگر بالای $\overleftrightarrow{PP'}$ تعیین شود فاصله آن از مرکز نسبت به $\overline{OT}$ بزرگتر میباشد بنا‌ء $\overline{OT}$ از O تا $\overleftrightarrow{PP'}$ کوتاه ترین فاصله است .

شکل (10 - 5)

به اساس قضیه (*) داریم که : $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{PP'}$ است یعنی شعاع دایره در نقطه تماس به مماس عمود است .

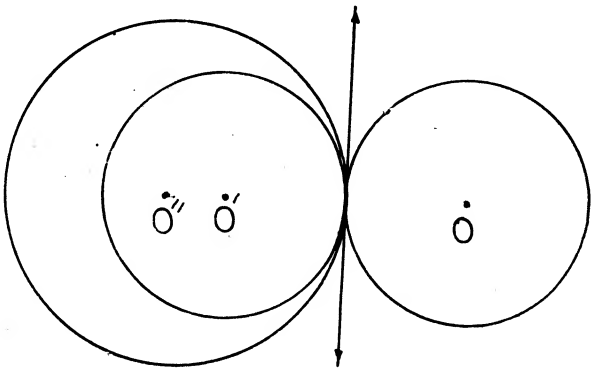
5-5 دوایر مماسی :- دو دایره که روی عین مستوی واقع بوده و در یک نقطه یک خط با هم مماس باشند دوایر مماسی نامیده می شوند .

اگر یک دایره در بین دایره دیگر واقع بوده و هردو در یک نقطه یک خط مستقیم مماس باشند بنام دوایر مماسی داخلی و اگر یک دایره در خارج دایره دیگر واقع بوده و در عین نقطه یک خط مستقیم با هم مماس باشند بنام دوایر مماسی خارجی یاد میگردند .

در شکل (11-5) ، O' و O'' دوایر مماسی داخلی ، O ، O' و O ، O'' دوایر مماسی خارجی می باشند .

---

* :- اگر از یک نقطه معین که خارج یک خط مستقیم واقع باشد بالای آن مستقیم چندین قطعه خط رسم شود کوتاه ترین قطعه خط عبارت از عمود یست که از آن نقطه معین بالای قطعه خط مفروض رسم شده است .

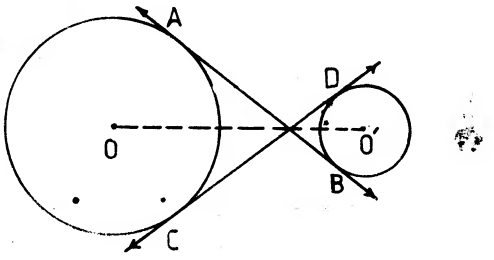


شکل (5-11)

5-6 . مماس های مشترک :-

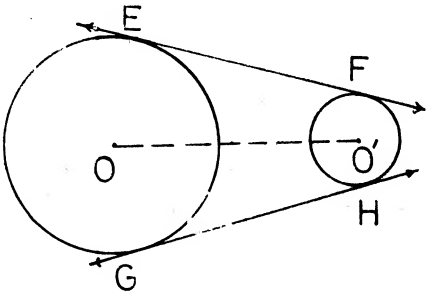
خط مستقیمی که درعین وقت دریک نقطه با هردو دایره مماس باشد بنام مماس مشترک یاد میگردد .

اگر مماس های مشترک فقط وفقط قطعه خط مراکز دوایر را قطع کرده باشند بنام مماس مشترک داخلی و اگر مماس مشترک قطعه خط مراکز دوایر را قطع نکند بنام مماس مشترک خارجی یاد میگردد .



شکل (5-12)

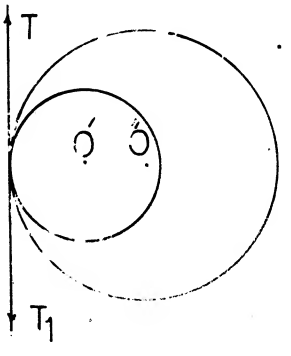
درشکل (5-12) ، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ مماس‌های مشترک داخلی دوایر O و O′ ، ودرشکل (5-13) ، $\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{GH}$ مماس‌های مشترک خارجی دوایر O و O′ میباشد .



شکل (5-13)

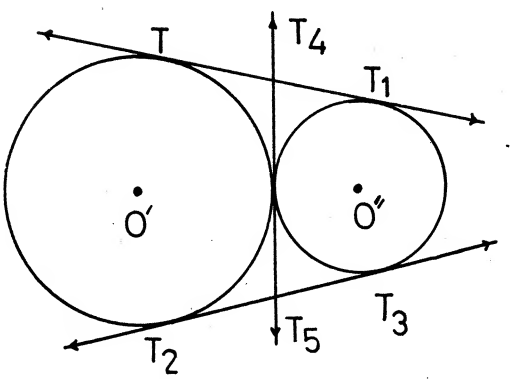
هرگاه دودایره باهم داخلاً مماس باشند فقط دارای یک مماس مشترک خارجی میباشند .

درشکل (5-14) $\overleftrightarrow{TT_1}$ مماس مشترک خارجی دوایر O′ و O″ است .



شکل (5-14)

واگر دو دایره خارجاً مماس باشد دارای یک مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی می باشد درشکل (5-15) $\overleftrightarrow{TT_1}$ و $\overleftrightarrow{T_2T_3}$ مماس مشترک خارجی و T_4T_5 مماس مشترک داخلی است .

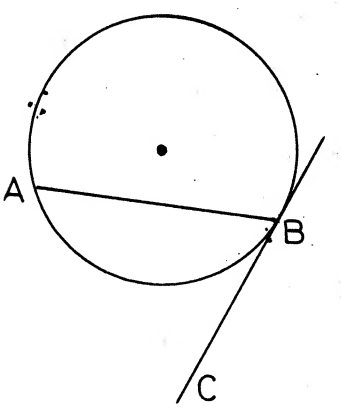


شکل (5-15)

قابل یادآوریست که دوایر متحدالمرکز مماس مشترک را دارا نمی باشند .

5-7 . زوایای مماسی :-

زاویه ایکه یک ضلع آن با دایره مماس وضلع دیگر آن وتر دایره باشد بنام زاویهٔ مماسی یاد میگردد درشکل (5-16) $\hat{ABC}$ زاویه مماسی است .



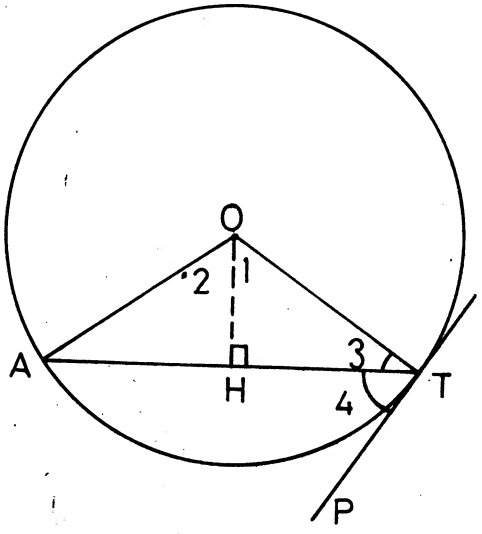
شکل (5-16)

1-7-5 . **قضیه** :- اندازهٔ یک زاویه مماسی مساوی به اندازهٔ نصف زاویهٔ مرکزیست که درمقابل عین قوس واقع شده باشند.

مفروض :- درشکل (17-5) ، زاویهٔ مماسی ATP وزاویهٔ مرکزی AOT درمقابل قوس AT واقع اند.

مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که :

$$\hat{ATP} = \frac{1}{2}\hat{AOT}$$



شکل (17-5)

ترسیم :- درشکل (17-5) ، عمود $\overline{OH}$ را رسم می کنیم .

ثبوت :- چون AOT مثلث متساوی الساقین است پس $\hat{1} = \hat{2}$.

می شود . وهم داریم که :

$\hat{3} + \hat{4} = 90^\circ$ ..... I ؛ چرا

$\hat{3} + \hat{1} = 90^\circ$ ..... II ؛ چرا

ازمقایسه روابط I و II بدست می‌آیدکه :

$$\hat{4} = \hat{1}$$

$$\hat{4} = \frac{\hat{AOT}}{2} = \hat{1}$$

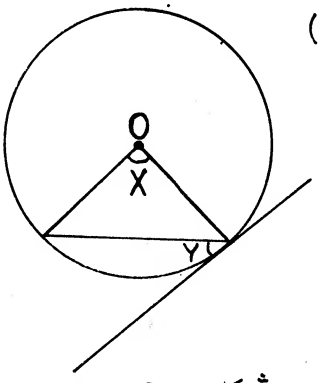
$$\hat{ATP} = \frac{1}{2}\hat{AOT}$$ ویا

مثال :- درشکل (5-18) $\hat{X} = 90^\circ$ است وسعت زاویه Y را پیدا نمائید .

حل :- به اساس تطبیق قضیه (5-7-1)

$$\hat{Y} = \frac{1}{2}(\hat{X})$$

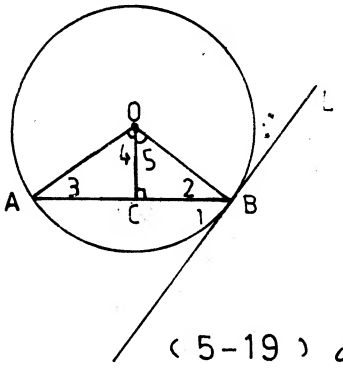
یا $\hat{Y} = 45^\circ$



شکل (5-18)

تمرین (5-2) :-

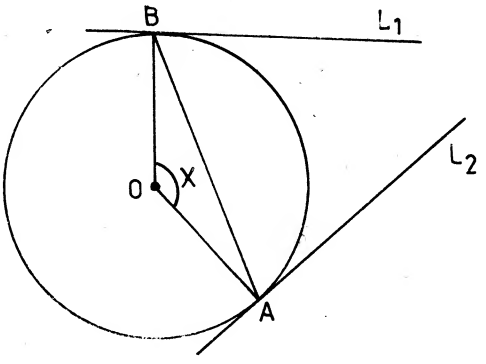
1- درشکل (5-19) B نقطهٔ تماس و L مماس است اگر $\hat{1} = 54^\circ\ 30'$ باشد وسعت زوایای $\hat{2}$ ، $\hat{3}$ ، $\hat{4}$ و $\hat{5}$ را معلوم نمائید.



شکل (5-19)

2 - درشکل (20 - 5) ، L_1 و L_2 مماس‌های دایره (O) اند اگر وسعت زاویه مرکزی (X) باشد نشان دهید که :

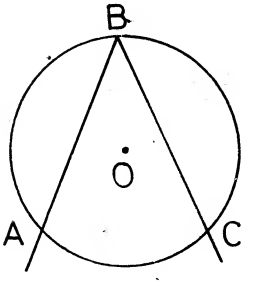
$$\hat{ABL_1} = \hat{BAL_2}$$



شکل (20 - 5)

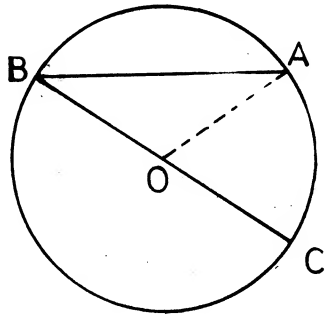
8 - 5 . زاویه محیطی :-

زاویه ایکه راس آن بالای محیط دایره واقع بوده و اضلاع آن دایره را قطع نماید زاویهٔ محیطی نامیده میشود . درشکل (21 - 5) ، ABC زاویه محیطی است .



شکل (21 - 5)

1 - 8 - 5. **قضیه اول** :- اندازهٔ زاویه محیطی مساوی به نصف اندازهٔ قوس مقابل آن است .



شکل (5 - 22)

مفروض :- ABC زاویهٔ محیطی و $\overset{\frown}{AC}$ قوس مقابل آن است .

مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که :

$$A\hat{B}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

ثبوت :-

I - اگر مرکز دایره بالای یکی از اضلاع زاویهٔ محیطی واقع باشد .

درشکل (5 - 22) ، مرکز دایره را به A ، وصل می نمائیم پس دیده میشود که زاویهٔ مرکزی AOC زاویهٔ خارجی مثلث AOB است پس با ساس قضیه (1-4-3) نوشته کرده می توانیم که :

$$A\hat{O}C = C\hat{B}A + O\hat{A}B \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

چون OAB مثلث متساوی الساقین است بناً مساوات ذیل را نوشته کرده می توانیم .

$$O\hat{B}A = O\hat{A}B$$

در رابطه I عوض $O\hat{A}B$ قیمت مساوی آنرا وضع می کنیم .

$$A\hat{O}C = O\hat{B}A + O\hat{B}A$$

$$A\hat{O}C = 2O\hat{B}A \quad \text{یا}$$

$$A\hat{O}C = 2A\hat{B}C \quad \ldots\ldots\ldots \text{II} \quad \text{ویا}$$

• از صنف هفتم میدانیم که $\hat{AOC} = \overset{\frown}{AC}$ است اگر این قیمت در رابطه II وضع شود بدست میاید که :

$$\hat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

II – مرکز دایره در داخل زاویهٔ محیطی واقع است .

قطر BD را رسم می نمائیم پس این قطر ضلع مشترک $\hat{ABD}$ و $\hat{DBC}$ میباشد. نظر به حالت اول می نویسیم که :

$$\hat{ABD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \quad \cdots\cdots \text{I}$$
$$\hat{DBC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} \quad \cdots\cdots \text{II}$$

رابطه I و II را طرف بطرف جمع می نمائیم .

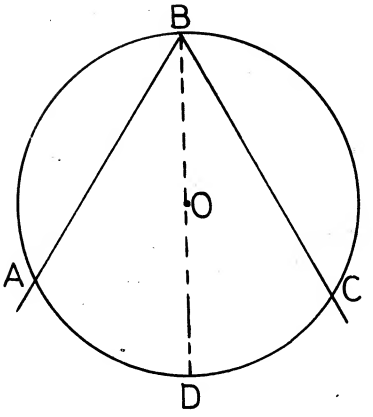
$$\hat{ABD} + \hat{DBC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$$

درحالیکه $\hat{ABC} = \hat{ABD} + \hat{DBC}$

است پس داریم که :

$$\hat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$$

درنتیجه بدست می آید که : $ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$



شکل (5 - 23)

III – اگر مرکز دایرهٔ خارج زاویه محیطی واقع باشد *

مثال: درشکل (5 - 24) ، $\hat{AOB} = 70^{\circ}$ است وسعت زوایای محیطی ADB و ACB را معلوم نمائید .

---

* این حالت را شاگردان ثبوت نمایند.

$$\hat{DOB} + \hat{COD} + \hat{AOC} = \hat{DOB} + \hat{AOD} \quad \text{.....II}$$

روابط I و II را با هم مقایسه نموده می بینیم که طرف چپ مساوات مذکور با هم مساوی بوده بناً طرف راست آن نیز با هم مساویست یعنی :

$$\hat{COB} + \hat{AOC} = \hat{DOB} + \hat{AOD} \quad \text{.....III}$$

قرار ترسیم $\hat{BOD} + \hat{AOD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

بنا بران نتیجه بدست می آید که : $\hat{COB} + \hat{AOC} = 180^\circ$

1-3-2. ثبوت غیر مستقیم :- در ثبوت غیر مستقیم عدم امکان نفی حکم قضیه توسط یکعده دلایل به اثبات میرسد که درینصورت صحت وحقیقت قضیه خود بخود ثابت میگردد . طور مثال قضیه آتی با استفاده از ثبوت غیر مستقیم به اثبات میرسد .

1-3-2a. قضیه :-

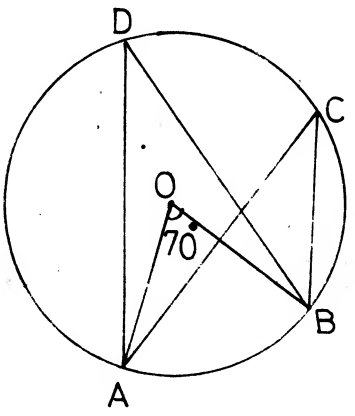
« در یک نقطه یک خط مستقیم فقط وفقط یک عمود بالای خط مذکور رسم شده میتواند وبس » .

چون مطلب حکم این قضیه یک عمود است بناً اگر عدم امکان دو ویا سه عمود ثابت گردد، درین صورت امکان یک عمود خود بخود ثابت میشود که این قسم ثبوت را بنابر ثبوت غیر مستقیم یاد میکنند .

حل :- چون زوایای محیطی ADB و ACB در مقابل عین قوس زاویهٔ مرکزی AOB قرار دارند پس باساس قضیه (1 - 8 - 5) نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{ADB} = \frac{1}{2}.70^\circ = 35^\circ$$

$$\hat{ACB} = \frac{1}{2}.70^\circ = 35^\circ$$



شکل (24 - 5)

یادداشت :

I - زوایای محیطی ایکه در مقابل عین قوس واقع شده باشند باهم مساوی اند .

II - زوایای محیطی و مماسی ایکه در مقابل عین قوس واقع شده باشند باهم مساوی اند .

2 - 8 - 5 . **قضیه دوم** :- وسعت زوایای محیطی ایکه اضلاع شان از انجام های قطر دایره بگذرد یک قایمه میباشد .

مفروض :- در شکل (25 - 5) ، ACB زاویه محیطی است .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که :

$$\hat{ACB} = 90^\circ$$

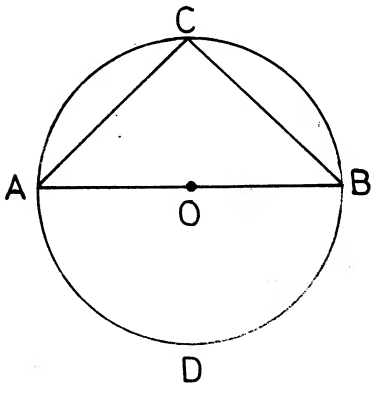
ثبوت :- AOB زاویهٔ مرکزی و ACB زاویه محیطی ایست که در مقابل قوس $\overset{\frown}{ADB}$ واقع شده .

چون $A\hat{O}B = 180^\circ$ است بنا بر

نوشته کرده می توانیم که :

$$2 \cdot A\hat{C}B = 180^\circ$$

یا $A\hat{C}B = 90^\circ$



شکل (5-25)

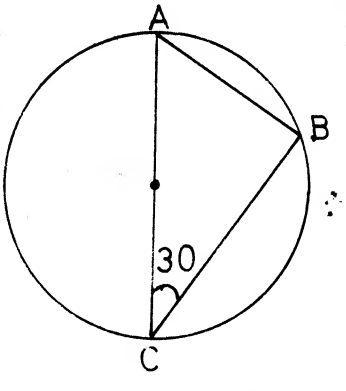
مثال :- درشکل (5-26) $A\hat{C}B = 30^\circ$ و $\overline{AC}$ قطردایره است وسعت زاویه BAC را معلوم نمائید .

حل :- به اساس تطبیق قضیه (5-8-2) $A\hat{B}C = 90^\circ$ است .

بنابرین $B\hat{A}C$ بطریق ذیل بدست میآید :

$$B\hat{A}C = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) =$$

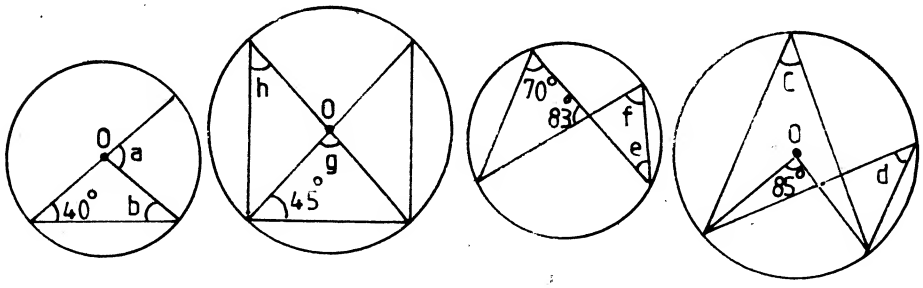
$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



شکل (5-26)

تمرین (3 - 5)

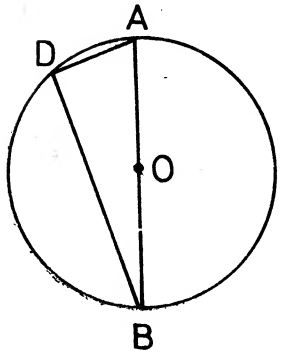
1 - درشکل (27 - 5) وسعت زوایای را معلوم نمائید که به واسطه حروف نشان داده شده اند (O) مرکز دوایر است .



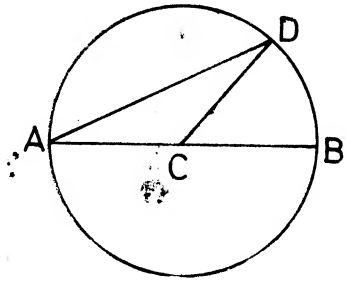
شکل (27 - 5)

2 - درشکل (28 - 5) ، AB قطر دایره (O) ، و $\hat{B} = 23^\circ$ است وسعت زاویه $\hat{A}$ را معلوم نمائید .

3 - درشکل (29 - 5) ، $\overset{\frown}{BD} = 50^\circ$ است وسعت $\hat{A}$ وقوس $\overset{\frown}{AD}$ را دریابید .



شکل (28 - 5)



شکل (29 - 5)

تمرینات عمومی فصل پنجم

گروپ اول :-

درسوالات ذیل برای هرسوال چهارجواب داده شده دورجواب صحیح راحلقه نمائید .

1 - عمودیکه در نقطه انجام قطرسم میشود عبارتست از :

a - قطر .　　b - مماس .

c - وتر .　　d - هیچکدام .

2 - طول قطعه خطی که مراکز دودایره را باهم وصل نموده ومساوی به تفاضل شعاعات دوایرمذکورباشد دربنصورت .

a - دایره هاباهم متقاطع اشت .　　b - دایره ها هیچکدام نقطهٔ مشترک ندارد.

c - دوایرخارجاً مماس است　　d - دوایرنا مبرده داخلاً مماس اند .

3 - طول قطعه خطی که مراکزدودایره را به هم وصل نموده و مساوی به مجموعهٔ شعاعات دوایرنا میرده باشد دربنصورت :

a ـ دو دایر با هم متقاطع اند . b ـ دو دایر هیچکدام نقطه مشترک ندارند .

c ـ دو دایر خارجاً با یکدیگر مماس ندارند. d ـ دو دایر نامبرده داخلاً با یکدیگر مماس است.

4 ـ اگر طول قطعه خطی که مراکز دو دایره را با هم وصل می نماید کوچکتر از مجموع شعاعات دایره های نامبرده باشد در اینصورت :

a ـ دایره ها با یکدیگر متقاطع است . b ـ دو دایر هیچکدام نقطه مشترک ندارند .

c ـ دایره ها خارجاً با یکدیگر مماس میباشد. d ـ دایره های نامبرده داخلاً با یکدیگر مماس می باشد . e ـ هیچکدام .

5 ـ اگر یک خط مستقیم از مرکز دایره گذشته و بالای یک وتر آن عمود باشد پس آن خط مستقیم وتر مذکور را :

a ـ تنصیف می نماید . b ـ به سه حصه تقسیم می نماید .

c ـ بدو حصهٔ غیر مساوی تقسیم می نماید. d ـ هیچکدام .

6 ـ اگر وسعت یک زاویهٔ مرکزی (45°) باشد وسعت زاویهٔ محیطی ایکه با زاویهٔ مرکزی داده شده در مقابل عین قوس واقع باشد مساویست به :

a ـ 20° b ـ 22°

c ـ 90° d ـ $22^\circ\ 30'$

گروپ دوم :ـ در افاده های ذیل کدام یک آن صحیح وکدام یک غلط است در پیش روی افادهٔ صحیح ، ص ، و در پیش روی افاده غلط ، غ ، بنویسید .

( ) 1 ـ هرگاه دو دایره با یکدیگر خارجاً مماس باشد تنها دارای دو مماس مشترک می باشند .

، 2 ـ زاویه ایکه راس آن بالای محیط دایره واقع بوده واضلاع آن دایره را قطع نموده باشد زاویهٔ مرکزی نامیده میشود .

، 3 ـ قطعه خطی که آغاز وانجام آن دو نقطهٔ مختلف محیط دایره باشد بنام وتر دایره یاد میشود .

، 4 ـ شعاع یک دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است .

، 5 ـ خطی که درعین وقت بالای دو دایره مماس باشد بنام مماس دوایر یاد میگردد .

گروپ سوم :ـ درجملات ذیل جاهای خالی را با کلمات مناسب پرنمایید.

1 ـ مرکز دایره وست نقاطیکه فاصلهٔ آنها ان مرکز کوچکتر از شعاع دایره باشد ..... دایره است .

2 ـ وترهای مساوی یک دایره از مرکز آن دایره به فاصله ..... واقع میباشد .

3 ـ دو دایرهٔ که روی عین مستوی واقع بوده وروی عین ..... بالا یک ..... مماس باشند مماس یکدیگر گفته می شوند .

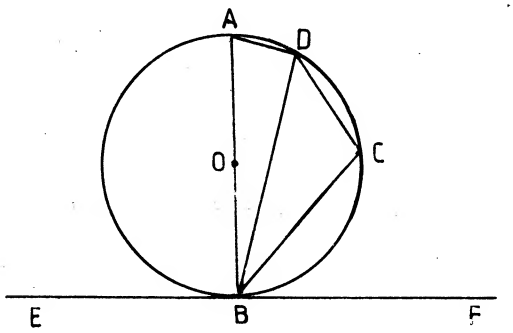
4 ـ وسعت زاویهٔ محیطی ایکه اضلاع آن از انجام های قطر بگذرد ..... است .

5 ـ اندازهٔ هر زاویهٔ مماسی مساوی به نصف اندازهٔ زاویهٔ مرکزیست که در ..... واقع باشد .

گروپ چهارم :ـ

1 ـ درشکل ، 30 ـ 5 ، هرگاه $\overline{AB}$ قطر دایره $\overline{EF}$ درنقطهٔ B

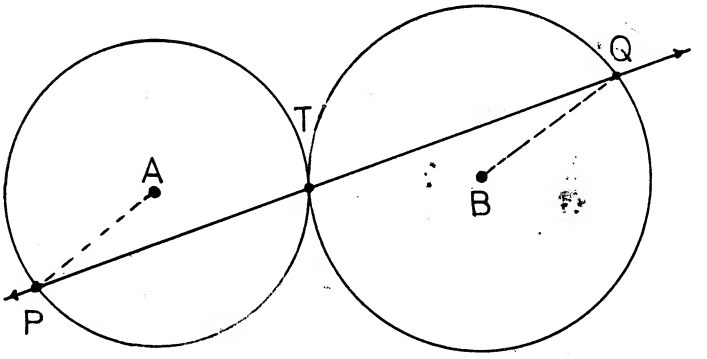
بالای دایره مماس و $F\hat{B}D = 75^\circ$ باشد وسعت زوایای $D\hat{B}A$ ، $B\hat{A}D$ ، $D\hat{B}E$ و $B\hat{C}D$ را معلوم نمائید .



شکل (5 - 30)

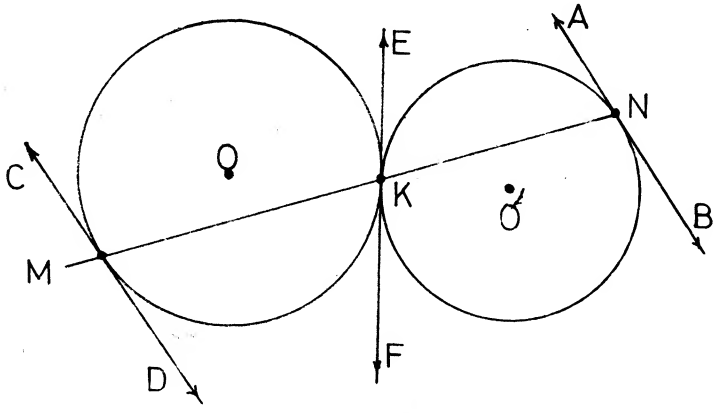
2 - دوایر A و B درنقطهٔ T خارجاً با یکدیگر مماس اند ثبوت نمائید که :

شعاعات $\overline{AP}$ و $\overline{BQ}$ با هم موازی اند شکل (5 - 31)



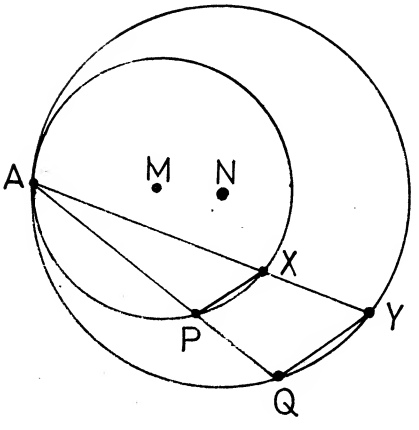
شکل (5 - 31)

3 - در شکل (32 - 5) ، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ بالای دوایر O و O' در نقاط N و M مماس و $\overrightarrow{EF}$ مماس مشترک هر دو دایره است که $\overline{MN}$ را در نقطهٔ تماس دوایر یعنی K قطع کرده است ثبوت نمائید که $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ است .



شکل (32-5)

4 - دو دایر یکه مراکز آن M و N است در نقطه (A) با یکدیگر داخلاً مماس بوده که (A) نقطهٔ تماس آنها است اگر وترهای $\overline{AQ}$ و $\overline{AY}$ دایرهٔ بزرگ را رسم کنیم در اینصورت به ترتیب دایرهٔ کوچک را در نقاط P و X قطع می نمایند. ثبوت نمائید که : $\overleftrightarrow{PX} // \overleftrightarrow{QY}$ است .



شکل (33-5)

AE16
B
.....
6431
.....
D69
.....
1298
.....
45

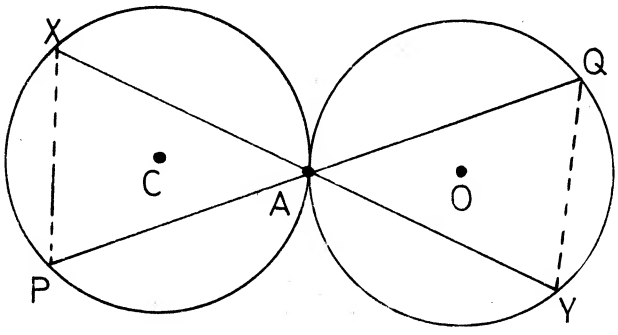
تعداد طبع (۲۰۰۰) طبع چہارم سال طبع ۱۳۷۲

مطبعہ افضل شریف پرنٹرز لاہور

کمک :- درنقطهٔ A مماس مشترک هردودایره رارسم نمائید.

4 - درشکل (34 - 5) ، دوایر (O) و (C) درنقطه (A) خارجاً بایکدیگرمماس اند وبه واسطه خطوط $\overline{PQ}$ و $\overline{XY}$ که از نقطهٔ A می گذرند قطع شده است .

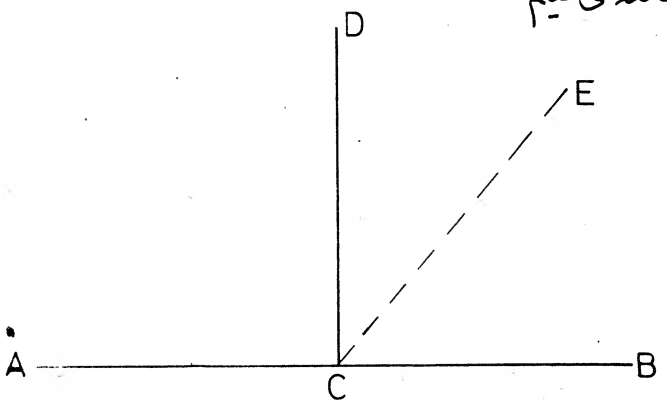
ثبوت نمائیدکه $\overline{XP} // QY$ است .



شکل (34 - 5)

(پایان فصل پنجم)

1- شکل :- درشکل (3-1) بالای قطعه‌خط $\overline{AB}$ عمود $\overline{CD}$ را درنقطه C مطالعه می‌کنیم .



شکل (3-1)

2- مفروض :- $\overline{AB}$ یک قطعه‌خط مستقیم و C یکی ازنقاط آن است که قطعه‌خط $\overline{CD}$ درنقطهٔ C بالای $\overline{AB}$ عمود است .

3- مطلوب :- می‌خواهیم ثبوت کنیم که CD یگانه عمود بست که بالای قطعه‌خط $\overline{AB}$ درنقطه C رسم گردیده وبدون CD عمود دیگری درنقطهٔ (C) بالای مستقیم $\overline{AB}$ رسم شده نمیتواند .

4- ترسیم :- اگر $\overline{CD}$ بالای مستقیم $\overline{AB}$ درنقطه C یگانه عمود نباشد پس یک عمود دیگری فرضاً $\overline{CE}$ می‌تواند درنقطه C بالای مستقیم AB عمود باشد .

5- ثبوت :- چون $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ است پس

$B\hat{C}D = 90^\circ$ ..... (1) قرارمفروض

به‌همین ترتیب $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ پس

$E\hat{C}B = 90^\circ$ II

روابط I و II را باهم مقایسه نموده می بینیم که اطراف راست مساوات باهم مساوی اند بنا ً طرف چپ آنها نیز باهم مساوی میباشد لذا نوشته کرده می توانیم که :

$$B\hat{C}D = E\hat{C}B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad III$$

حالانکه درشکل 3-1 ، بصورت واضح وآشکارا دیده می شود که رابطه III حقیقت ندارد به خاطریکه زاویه $E\hat{C}B$ جززاویه $D\hat{C}B$ میباشد رابطه III زمانی امکان داردکه $\overline{CE}$ و $\overline{CD}$ باهم منطبق گردند پس نتیجهٔ که بدست آمد حقیقت ندارد . بنا ً فرضیه ایکه بالای خط مستقیم $\overline{AB}$ درنقطه C علاوه ازعمود $\overline{CD}$ عمود دیگری مثل $\overline{CE}$ رسم شده می تواند امکان ندارد بناءً از این نتیجه گیری به اثبات می رسدکه $\overline{CD}$ یگانه عمودیست که درنقطه C بالای قطعه خط $\overline{AB}$ رسم شده می تواند وبس . وامکان ترسیم عمود دیگری مثل $\overline{CE}$ وغیره در نقطه C بالای قطعه خط $\overline{AB}$ موجود نیست .

4-1 قضایای معکوس :

هرگاه دوقضیه دارای خواصی باشندکه فرضیهٔ قضیهٔ اولی حکم قضیه دومی وحکم قضیهٔ دومی فرضیه قضیه اولی باشد چنین قضایارا بنام قضیه های معکوس یکدیگر یاد میکنند . طور مثال :

دوقضیه ذیل را مطالعه می کنیم :

قضیه اول :- هرگاه یک مثلث متساوی الساقین باشد دارای دوزاویه مساوی میباشد .

قضیه دوم :- هرگاه یک مثلث دارای دو زاویه مساوی باشد آن مثلث متساوی الساقین است . دیده می شود که حکم قضیه اولی فرضیه قضیه دومی و بالعکس فرضیه قضیه دومی حکم قضیه اولی است . پس این چنین قضایا را قضایای معکوس میگویند .

نوت (NOTE) :- معکوس هر قضیه بعضی اوقات محقق نمیباشد یا بعبارهٔ دیگر معکوس بعضی قضایا حقیقت دارد و معکوس بعضی قضایای دیگر حقیقت ندارد .

طور مثال :- می دانیم که هرگاه دو زاویه متقابل الرأس باشند با هم مساوی اند لاکن هر دو زاویه ایکه با هم مساوی باشند متقابل الراس شده نمیتوانند یعنی معکوس این قضیه «هر دو زاویه متقابل الراس با هم مساوی اند» حقیقت ندارد .

اصل پنجم اقلیدس و اهمیت آن در تاریخ ریاضی

اصل پنجم اقلیدس در تاریخ ریاضی اهمیت فراوان دارد بخاطریکه علم هندسه به اندازهٔ زیاد روی استدلال و منطق استوار است بناً دانشمندان ریاضی کوشیده اند که از ساختن اصول زیاد و تعریف های بیجا جلوگیری نمایند . بناً یکعده از علما و دانشمندان کوشش کردند که این اصل را به شکل یک قضیه با استفاده از اصول اقلیدس به اثبات برسانند برای ثبوت این مدعا دانشمندان ریاضی برای قبول نمودن صحت و حقیقت مفاهیم معادل این اصل ضرورت احساس نمودند چنانچه پلی فایر (Play fair) مفهوم آنرا به حیث یک اصل قبول نمودند .

« ازیک نقطه خارجی یک خط مستقیم با مستقیم مذکور فقط وفقط یک خط موازی رسم شده می تواند وبس » .

اصل موضوعهٔ پلی فایر وا صل پنجم اقلیدس بصورت عموم معادل یکدیگر شمرده می شود .

در ابتدای قرن (19) میلادی سه تن از دانشمندان هریک :

گوس (1855 _ 1777) Gauss « لوباچوفسکی (1856 - 1739) :

Lobachewsky وبولیا 1856 _ 1777 Bolyai مستقل وطور جداگانه از همدیگر کار میکردند . علمای مذکور تحقیقات خود را طوری پیش می بردند که اصل پنجم اقلیدس را به حیث اصل موضوعه قبول نکرده بودند وبالاخره موفق به کشف هندسه غیر اقلیدسی گردیدند با وجود اینکه قبول هندسهٔ غیر اقلیدسی در مرحلهٔ اول به مشکلات مواجه بود لاکن فعلاً این یک حقیقت ثبوتی وقبول شده است که به همان اندازهٔ که هندسهٔ اقلیدسی قابل اهمیت میباشد هندسه غیر اقلیدسی نیز از اهمیت برخوردار میباشد .

سوالات فصل اول

گروپ اول :- درسوالات آتی برای هرسوال چهارجواب داده شده که یکی ازین جواب ها صحیح است دورجواب صحیح را حلقه کنید .

1 - ازیک نقطهٔ خارجی خط مستقیم بالای آن :

a - دوعمود رسم شده میتواند b - سه عمود رسم شده میتواند .

c - تنها یک عمود رسم شده می تواند d - هیچکدام

2 - اگردوخط موازی توسط یک خط مستقیم قطع گردد مجموعه یا وسعت زوایای داخلی ایکه به یکطرف خط مستقیم بوجود میآید مساویست به :

a - 90° b - 180°

c - 360° - هیچکدام

3 - صحت وحقیقت یک اصل موضوعه به یکعده دلایل منطقی :

a - ضرورت دارد . b - ضرورت ندارد .

c - هم ضرورت دارد هم ندارد . d - هیچکدام .

4 - اگرعدم امکان نفی حکم قضیه توسط یکعده دلایل منطقی به اثبات برسد این ثبوت را :

a - اصل موضوعه گویند . b - ثبوت غیرمستقیم گویند .

c - ثبوت مستقیم گویند . d - قضیه معکوس گویند .

گروپ دوم :- درسوالات آتی طرف راست یکعده جملات وتعریفات نوشته شده که جواب هرکدام آنها ازافاده های طرف چپ موافق میباشد شما

تنها نمبر سوال طرف راست را پیش روی جواب مربوط طرف چپ بنویسید.

1 - یک مفهوم ساده است که صحت وحقیقت آن بکدام دلیل ضرورت ندارد. ( ) حقیقت دارد.

2 - فرضیه یک قضیه نتیجه قضیه دیگر ونتیجهٔ قضیه دیگر فرضیه یک قضیه است. ( ) اصل پنجم اقلیدس.

3 - یک مفهوم است که صحت وحقیقت آن به یکعده دلایل منطقی ضرورت دارد. ( ) قضیه معکوس.

4 - موجودیت هندسه غیر اقلیدسی. ( ) اصل متعارفه.

5 - آن فرضیه ایکه در اکثر ساحات ریاضی مورد استعمال دارد. ( ) قضیه.

6 - هرگاه دو خط مستقیم مفروض توسط یک قاطع قطع گردد اگر وسعت زوایای داخله ایکه به یکطرف قاطع بوجود میآیند کمتر از دو قایمه باشد پس آن خطوط مفروض یکدیگر خود را به همان طرف قاطع قطع می کند. ( ) اصل موضوعه.

گروپ سوم :- جاهای خالی را توسط کلمات مناسب وصحیح پُر نمایید.

1 - از دو نقطه داده شده فقط وفقط یک خط مستقیم میگذرد این یک ..... درهندسه است.

2 - زاویه خارجی یک مثلث ..... از زوایای غیر مجاور داخلی آن.

3 ـ هرگاه دو مستقیم یکدیگر خود را قطع نمایند پس ..... می سازند.

4 ـ نا صف های ..... به امتداد یک خط مستقیم قرار دارند.

5 ـ با آوردن یکعده دلایل منطقی و استفاده از اصول هندسی باید ..... از ..... آن بدست آید.

6 ـ در ..... حکم قضیه بصورت مستقیم از فرضیه آن بدست می آید.

گروپ چهارم :ـ

1 ـ اصل موضوعه چه را گویند ؟

2 ـ قضیه چیست ؟

3 ـ یک قضیه ویک اصل موضوعه باهم چه فرق دارد ؟

4 ـ آیا هرقضیه دارای قضیه معکوس میباشد ؟.

5 ـ اصل پنجم اقلیدس را بیان کنید ؟

6 ـ درقضیه های آتی فرضیه ونتیجه آنرا جدا نمائید .

a ـ هرگاه دو مستقیم دربین خود موازی باشند مستقیمی که یکی ازین دو خطوط موازی را قطع کند دیگر آنرا نیز قطع میکند .

b ـ اگر دو مستقیم با مستقیم سوم موازی باشند دربین خود نیز موازی میباشند .

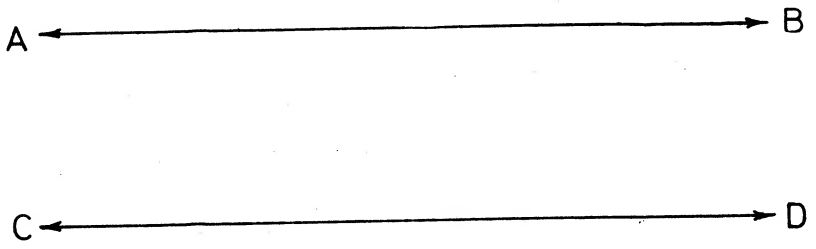
c ـ هرگاه دو مستقیم دربین خود موازی باشند هرخط مستقیم ایکه بالای یکی ازین خطوط عمود باشد بالای دیگر آن نیز عمود میباشد .

فصل دوّم

موازات « موازی‌ها »

2-1 . خطوط موازی :

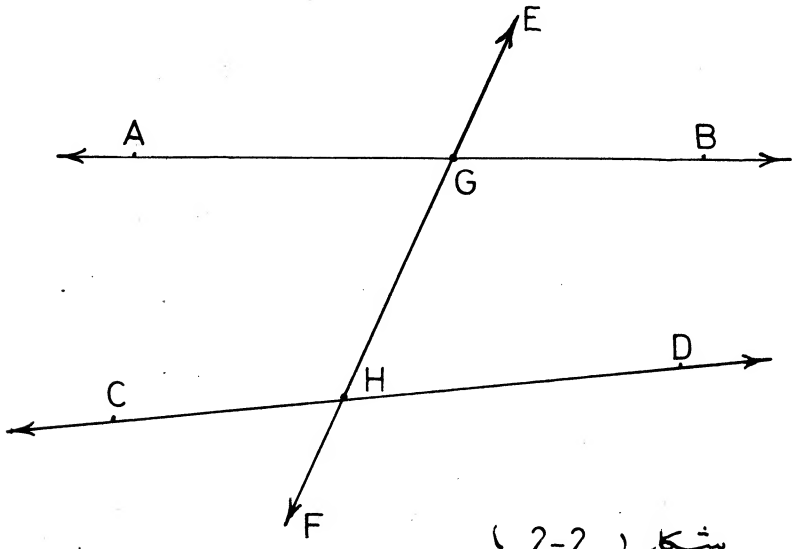
خطوطیکه روی یک مستوی قرارداشته وامتداد شان یکدیگر خود را قطع نکنند بنام خطوط موازی یاد میگردند. درشکل (1 - 2) ، خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ باهم موازی اند زیرا نقطهٔ مشترک نداشته وامتداد شان یکدیگر خود را قطع نمی‌کنند .



شکل (1-2)

2-2 . خطوط قاطع :

اگر یک خط مستقیم یک ویاچند خط مستقیم دیگر را قطع کند خط مذکور بنام خط قاطع یاد میگردد . درشکل (2-2) EF خط قاطع $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ میباشد .

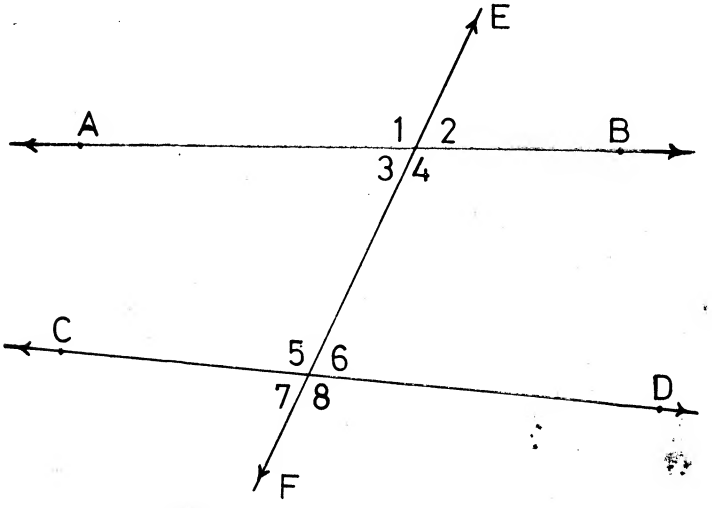


شکل (2-2)

2-3. زوایای بین دو خط و یک قاطع :

اگر خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ توسط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ در دو نقطه قطع گردد

در اثر تقاطع آنها هشت زاویه بوجود میآید . شکل (2-3)



شکل (2-3)

اصول اقلیدس و قضیه

1-1. اصول اقلیدس :

در بسیاری علوم یک سلسله مفاهیم ومفکوره های ساده وابتدائی موجود است که صحت وحقیقت آن ها بدون دلیل قبول میگردد این مفاهیم اولی بنام اصول موضوعه (Postulates) واصول متعارفه یا اولیات - (Axioms) همان علم یاد شده که اساس وتهداب آن علم را تشکیل میدهد درریاضیات هم اینچنین مفاهیم ومفکوره های قبول شده موجود است که قرار ذیل تشریح ومطالعه میگردد .

1-1-1 **اصول موضوعه :** فرضیه ایست که دریک قسمت خاص ریاضی استعمال میشود .

1-1-2 **اصول متعارفه :** فرضیه هایست که تقریباً درتمام ساحات ریاضی مورد استعمال دارد .

مثلاً: اگر بگوئیم که ، « ازدونقطه داده شده فقط وفقط یک خط مستقیم میگذرد » این یک اصل موضوعهٔ هندسی است درحالیکه :

اگر $a = c$

و $b = c$ باشد

پس $a = b$ میشود

2-3-1 . زوایای خارجی وداخلی :

درشکل (2-3) ، زوایای 8 ، 7 ، 2 ، 1 زوایای خارجی وزوایای 6 ، 5 ، 4 ، 3 زوایای داخلی می باشند.

2-3-2 . زوایای متبادله :

آن دوزاویه داخلی وخارجی ایکه یکی آن به یک طرف قاطع و دیگرآن به طرف دیگرقاطع واقع شده وراس مشترک نداشته باشند زوایای متبادله نامیده میشوند. درشکل (2-3) $\hat{3}$ ، $\hat{6}$ و $\hat{4}$ ، $\hat{5}$ زوایای متبادلهٔ داخلی و $\hat{1}$ ، $\hat{8}$ و $\hat{2}$ ، $\hat{7}$ زوایای متبادلهٔ خارجی اند.

2-3-3 . زوایای متوافقه :

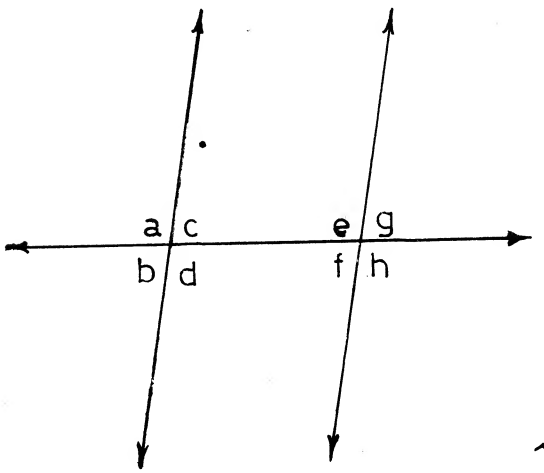
دوزاویه ایکه هردوبه یکطرف قاطع واقع بوده ، یکی ازآنها داخلی ودیگرشان خارجی ودارای راس مشترک نباشند متوافقه نامیده میشوند درشکل (2-3) ، هرجوره زوایای $\hat{1}$ و $\hat{5}$ ، $\hat{3}$ و $\hat{7}$ ، $\hat{2}$ و $\hat{6}$ و $\hat{4}$ و $\hat{8}$ زوایای متوافقه اند .

سوالات 2-1 :

شکل (2-4) ، رادرنظرگرفته سوالات ذیل را جواب دهید :

1 – زوایای داخلی وخارجی را جدا نمایید .

2 – هرجوره از زوایای متوافقه رانام ببرید .



شکل (2-4)

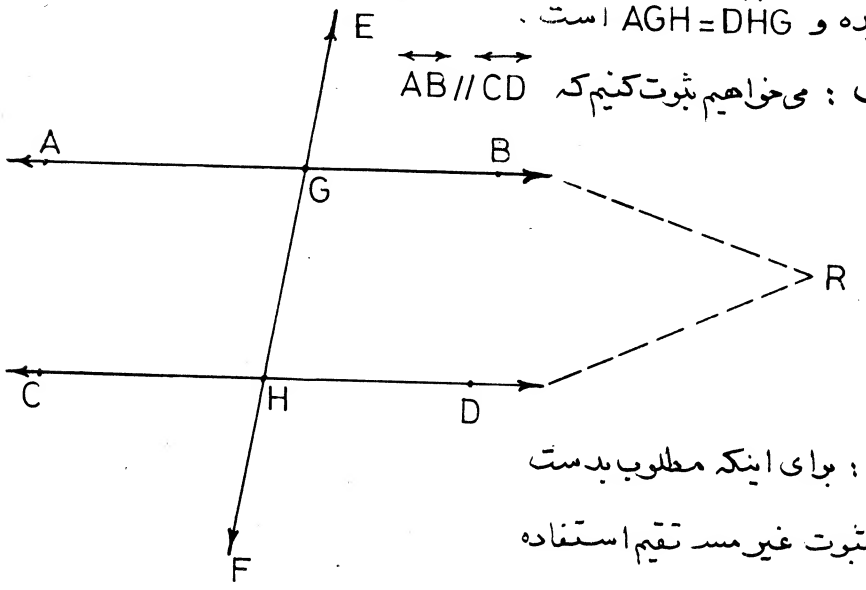
3 - هرجوره زوایای متبادله داخلی وخارجی را نام ببرید .

2-4 . شروط موازی بودن دوخط مستقیم :

2-4-1 . قضیه اول :- هرگاه دوخط مستقیم بایک قاطع زوایای متبادله مساوی بسازند باهم موازی اند .

مفروض : مستقیم‌های $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ توسط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ درنقاط G و H قطع گردیده و $\hat{AGH} = \hat{DHG}$ است .

مطلوب : می‌خواهیم ثبوت کنیم که $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



ثبوت : برای اینکه مطلوب بدست آید از ثبوت غیرمستقیم استفاده می‌نمائیم :

شکل (2 - 5)

مفروض میکنیم که $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ باهم موازی نباشند پس اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ هردو به یکطرف امتداد داده شود . حتماً دریک نقطه یا بطرف B و D ویا بطرف A و C یکدیگرخود را قطع میکنند . طوری درنظر می‌گیریم که بطرف B و D یکدیگرخودرا درنقطه R قطع نموده اند بناءً مثلث ΔGRH بدست می‌آید که زاویه $\hat{AGH}$ زاویه خارجی آن مثلث است پس به اساس قضیه (1a-3-1) برشته کرده می توانیم که :

$$\hat{AGH} > \hat{RHG}$$

رابطه بالا امکان ندارد بخاطریکه درفرضیه $\hat{AGH} = \hat{DHG}$

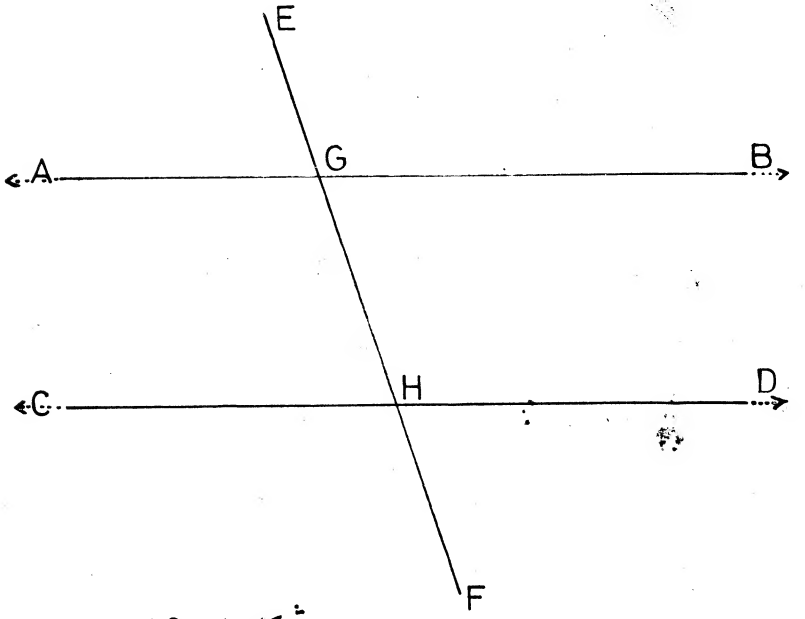
داشتیم بنا $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ یکدیگررا درنقطه R قطع کرده نمیتوانند درنتیجه بدست می آید که :

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ بطرف A و C یکدیگرخودرا قطع کنند باز هم قسم بالا ثبوت می شود .

2-4-2. **قضیه دوم** : هرگاه دوخط مستقیم با یک قاطع زوایای متوافقه مساوی بسازند دربین خود موازی میباشند .

مفروض : $\overleftrightarrow{EF}$ خط های مستقیم AB و CD را درنقاط G و H قطع میکند و $\hat{EGA} = \hat{GHC}$ است . شکل (2 - 6)



شکل (2 - 6)

مطلوب : می خواهیم ثبوت کنیم که : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

ثبوت : متقابل الراس ..... $\hat{EGA} = \hat{HGB}$

فرضیه ..... $\hat{EGA} = \hat{GHC}$

از مقایسه مساوات بالا بدست می آید که :

$$\hat{HGB} = \hat{GHC}$$

چون $\hat{HGB}$ و $\hat{GHC}$ زوایای متبادله مساوی اند بنأ نظر به قضیه اول نوشته کرده می توانیم که :

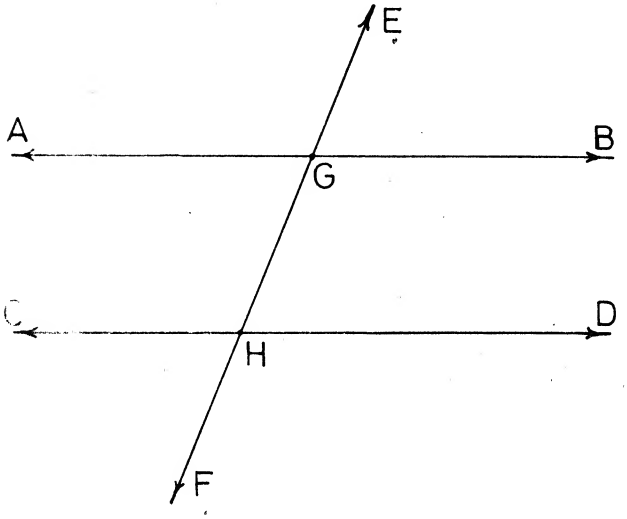
$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

2-4-3. **قضیه سوم** : هرگاه دو خط مستقیم با یک قاطع زوایای متممه یکطرفه داخلی بسازند در بین خود موازی میباشند .

مفروض :- در شکل (2-7) ، خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ توسط قاطع $\overleftrightarrow{EF}$ قطع گردیده است . و $\hat{DHG} + \hat{HGB} = 180^\circ$ است .

مطلوب :- ثبوت - می نمائیم که :

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



شکل (2-7)

ثبوت : فرضیه ... $\hat{DHG} + \hat{HGB} = 180^\circ$

زوایای مجاوره به یکطرف خط مستقیم $\hat{AGH} + \hat{HGB} = 180^\circ$

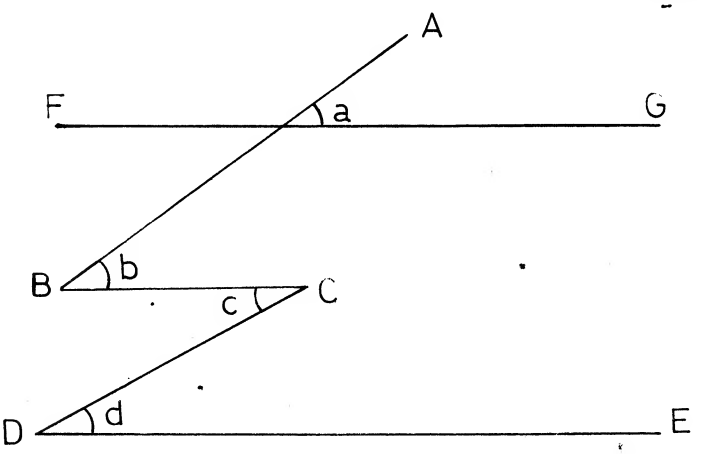
از مقایسه مساوات بالا بدست میآید که :

$$\hat{DHG} = \hat{AGH}$$

چون $\hat{DHG}$ و $\hat{AGH}$ زوایای مساوی متبادله داخلی اند بنآ نظریه قضیه (1 - 4 - 2) نوشته کرده می توانیم که :

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

مثال : در شکل (2-8) $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d}$ است سه جوره خطوط موازی را نوشته کنید .



شکل (2 - 8)

حل :- چون $\overline{DE}$ و $\overline{BC}$ توسط قاطع $\overline{DC}$ زوایای متبادله داخلی مساوی c و d را ساخته اند پس نوشته کرده می توانیم که $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

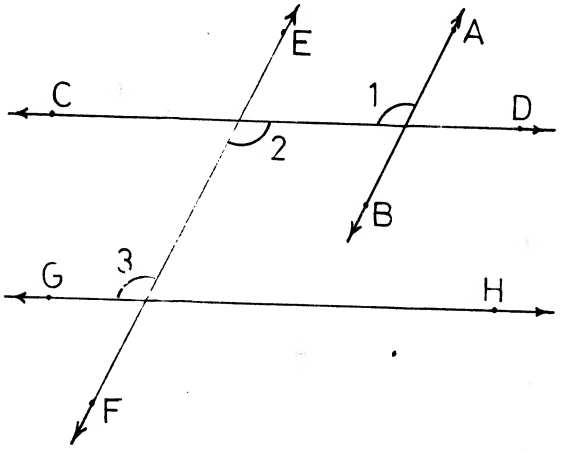
به همین ترتیب قاطع $\overline{BC}$ همرای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ زوایای متبادله داخلی مساوی b و c را ساخته اند پس داریم که $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

وهم چنان $\overline{FG}$ و $\overline{BC}$ باقاطع $\overline{AB}$ زوایای متوافقه مساوی ساخته اند

پس نوشته کرده می توانیم که $\overline{FG} // \overline{BC}$

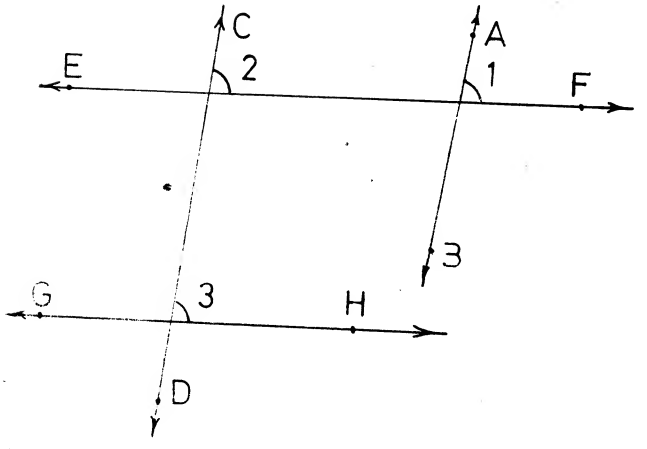
تمرین (2-2)

1 - درشکل (2-9) $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$ است جوره های ازخطوط موازی که درشکل دیده میشود نوشته کنید .



شکل (2-9)

2 - درشکل (2-10)

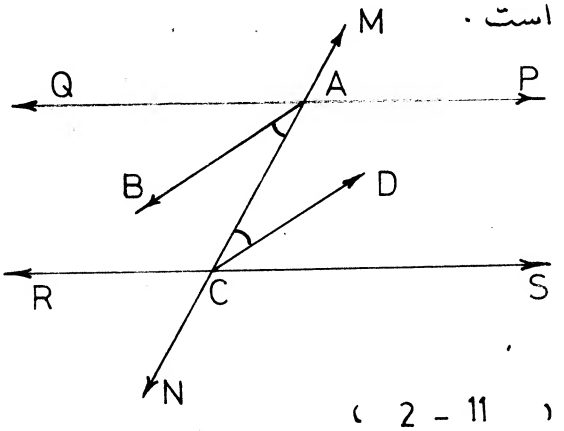


$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$

است . کدام جوره خطوط باهم موازی اند .

3:- درشکل ذیل $\overleftrightarrow{AB}$ ناصف $\hat{QAC}$ و $\overrightarrow{CD}$ ناصف زاویه $\hat{ACS}$ است.

اگر $\hat{QAC} = \hat{ACS}$ باشد نشان دهید که $\overleftrightarrow{QP} // \overleftrightarrow{RS}$ و $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ است.



شکل (2 - 11)

4:- ثبوت کنید که اگر دو خط مستقیم بالای یک خط مستقیم سومی عمود باشد در بین خود موازی اند.

2 - 5: خواص زوایای که یک قاطع همرای خطوط موازی میسازند

2-5-1. **قضیه اول** :- هرگاه دو خط موازی توسط یک قاطع قطع گردیده زوایای متبادله داخلی بسازند وسعت آنها با هم مساوی میباشد.

مفروض :- قاطع $\overleftrightarrow{XY}$ خطوط موازی $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ را در نقاط T و U قطع کرده است.

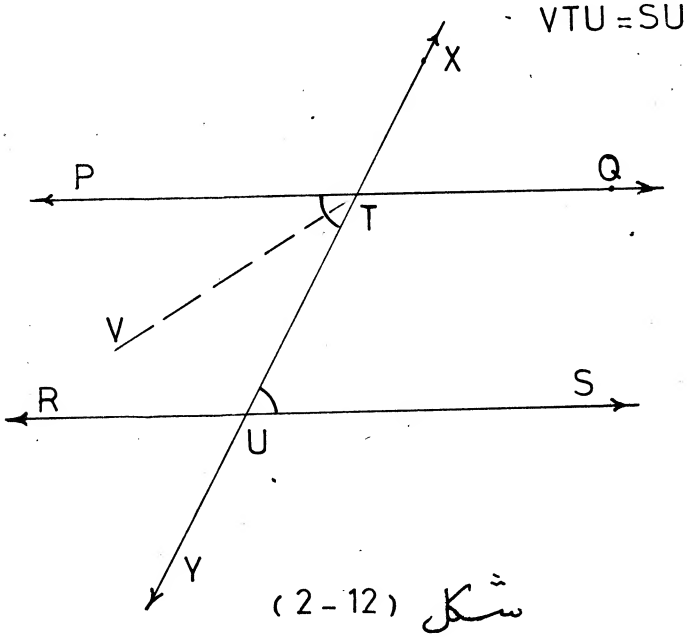
مطلوب :- ثبوت می کنیم که $\hat{PTU} = \hat{SUT}$ میباشد.

ثبوت :- (ثبوت را بصورت غیر مستقیم پیش می بریم) .

اگر $\hat{PTU} = \hat{SUT}$ نباشد پس باید کدام زاویهٔ دیگری مثل $\hat{VTU}$

داشته باشیم که $S\hat{U}T$ مساوی باشد .

یعنی $V\hat{T}U = S\hat{U}T$.



شکل (2-12)

ازطرف دیگر $V\hat{T}U$ و $S\hat{U}T$ زوایای متبادله اند پس باساس قضیه (2-4-1) $\overleftrightarrow{VT} // \overleftrightarrow{RS}$ است حالانکه درفرضیه $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$ داشتیم این دو مساوات درعین وقت نظربه اصل موازات پلی فایر (*) امکان ندارد ودرنقطه T دوخط موازی $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{VT}$ همراه $\overleftrightarrow{RS}$ رسم شده نمی تواند وغیراز $P\hat{T}U$ کدام زاویهٔ دیگری نیست که وسعت آن با $S\hat{U}T$ مساوی باشد پس داریم که :

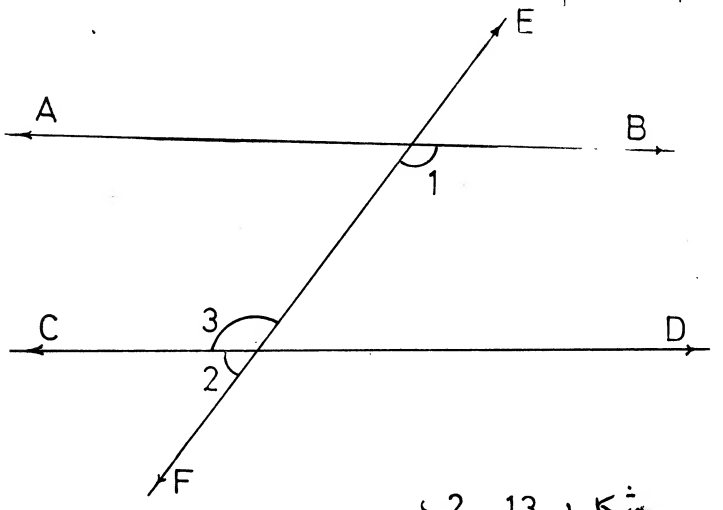
$$P\hat{T}U = S\hat{U}T$$

اصل موازات پلی فایر :- ازیک نقطه خارجی یک خط مستقیم بالای آن خط مستقیم فقط وفقط یک خط موازی رسم شده می تواند .

اصل موازات پلی فایر معادل اصل پنجم اقلیدس است .

برای ثبوت کردن مساوات زوایای متبادله دیگر شاگردان می‌توانند طریقه ذیل را تعقیب نمایند.

مثال :- درشکل (13-2) $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ باهم موازی‌اند اگر $\hat{1} = 120^\circ$ باشد وسعت زاویه ($\hat{2}$) را معلوم نمائید.



شکل (13 - 2)

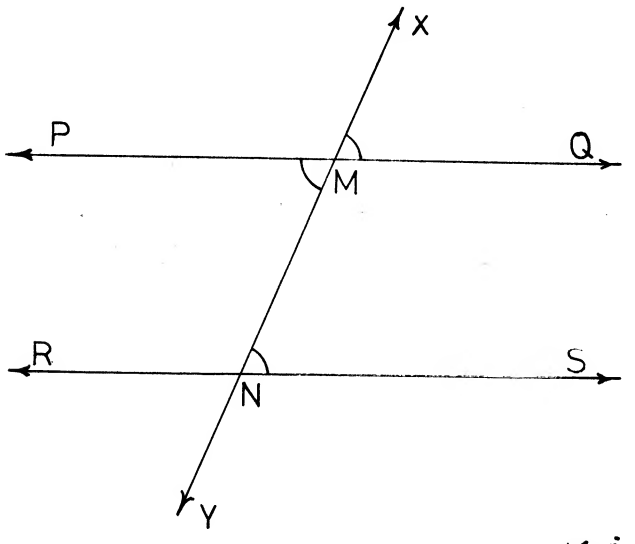
حل :- چون $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ خطوط موازی‌اند پس به اساس قضیه (1-4-2) $\hat{1} = \hat{3} = 120^\circ$ میباشد به همین ترتیب $\hat{2}$ و $\hat{3}$ زوایای مجاوره به یکطرف خط مستقیم میباشند. پس نوشته کرده می‌توانیم که :

$$\hat{2} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

2 _ 5 _ 2. **قضیه دوم** :- هرگاه دو خط مستقیم باهم موازی باشند درین صورت هر قاطع با آن‌ها زوایای مترافقه مساوی را تشکیل میدهند.

مفروض :- قاطع $\overleftrightarrow{XY}$ خطوط موازی $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ را درنقاط M و N قطع نموده‌اند - شکل (14-2)

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که $\hat{SNM} = \hat{QMX}$ است -



شکل (2-14)

ثبوت :- متقابل الراس .... $\hat{QMX} = \hat{PMN}$

متبادله ..... $\hat{PMN} = \hat{SNM}$

از مقایسه مساوات بالاچنین نتیجه بدست میآید که $\hat{QMX} = \hat{SNM}$ مساوات زوایای متوافقه دیگر نیز به همین ترتیب ثابت می شود .

مثال :- درشکل (2-14) $\hat{XMP} = 113^\circ$ است وسعت زاویه MNR رامعلوم نمائید .

حل :- درقضیه (2-4-2) ثبوت نمودیم که :

$\hat{XMP} = \hat{MNR}$ است .

پس $\hat{MNR} = 113^\circ$

2-5-3 قضیه سوم :- هرگاه دوخط مستقیم باهم موازی باشند در اینصورت هرقاطع با آنها زوایای داخلی یکطرفه متممه می سازند .

این یک اصل متعارفه است بخاطریکه قرضیهٔ مذکور نه تنها در الجبر بلکه در قسمت های دیگر ریاضی نیز صحت داشته واستعمال میشود .

درعلم هندسه هم یکتعداد مفاهیم اولی وجود دارد که صحت وحقیقت آنها بدون کدام دلیل قابل قبول بوده وبنام اصول هندسی یاد میگردد. درحقیقت اصول هندسی اساس علم هندسه را تشکیل داده وبنام تهداب این علم یاد میشود.

چون مفاهیم ومفکوره های علم هندسه برای اولین بار توسط عالم یونانی اقلیدس (Euclids) که درقرن سوم (ق م) درشهر سکندریه به تدریس علم هندسه مشغول بود در (13) فصل ترتیب گردیده است بناءً بنام عناصر اقلیدس ویا مقدمات اقلیدس یاد شده وبه همین ترتیب اصولیکه اقلیدس با استفاده از آنها درمعرفی وشناخت علم هندسه کار گرفته بنام اصول اقلیدس یاد میگردد که در معرفی هندسه مسطحه مورد استعمال بوده و قرار ذیل است :

1 ـ از دو نقطه داده شده فقط و فقط یک خط مستقیم میگذرد.

2 ـ هرقطعه خط به اندازهٔ معین آن روی یک خط دیگر تولید و واقع شده میتواند .

3 ـ هردایره توسط شعاع ومرکز آن مشخص میشود .

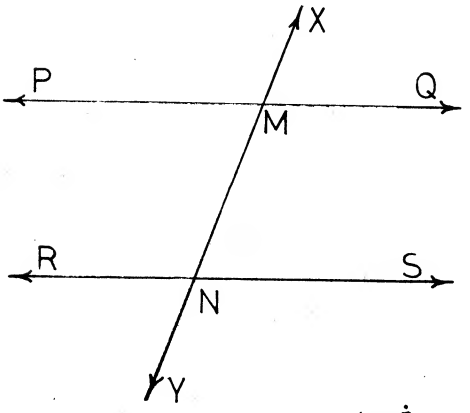
4 ـ هرگاه دو خط مستقیم مفروض توسط یک قاطع قطع گردد اگر وسعت زوایای داخلی که به یکطرف قاطع بوجود میآید کمتر از دو قائمه باشد خط های مفروض یکدیگر خود را به همان طرف قاطع قطع میکند (یکجا میشود) .

5 ـ یک شکل هندسی بدون تغیر شکل واندازهٔ آن از یکجا بجای دیگر

مفروض :- قاطع $\overleftrightarrow{XY}$ خطوط موازی $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ رادرنقاط M و N قطع نموده است .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که $S\hat{N}M + N\hat{M}Q = 180^\circ$ است .

ثبوت :- چونکه PMN و NMQ دوزاویه مجاوره به یکطرف خط مستقیم واقع است پس داریم که : $P\hat{M}N + N\hat{M}Q = 180^\circ$ I



شکل (2-15)

از قضیه (1-4-2) نوشته میکنیم که:

$P\hat{M}N = S\hat{N}M$ II

مساوات I و II رامقایسه نموده نتیجه میگیریم که :

$S\hat{N}M + N\hat{M}Q = 180^\circ$

به همین ترتیب ثبوت کرده می توانیم که:

$P\hat{M}N + M\hat{N}R = 180^\circ$

مثال :- درشکل (2-15) $N\hat{M}Q = 114^\circ$ است وسعت $S\hat{N}M$ را معلوم نمائید .

حل :- درقضیه (3-5-2) ثبوت کردیم که :

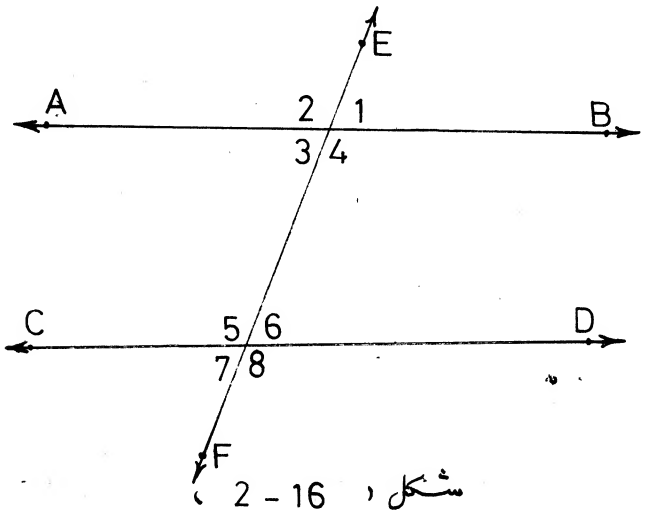
$N\hat{M}Q + S\hat{N}M = 180^\circ$

پس . $S\hat{N}M = 180^\circ - N\hat{M}Q = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$

تمرین 3-2 :-

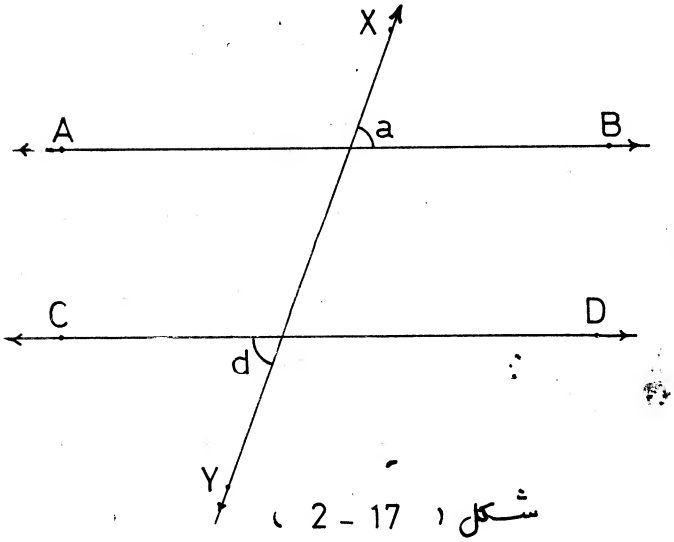
1- درشکل (2-16) $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ و $\hat{1} = 70^\circ$ است .

وسعت زوایای 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 و را دریابید



شکل (2 - 16)

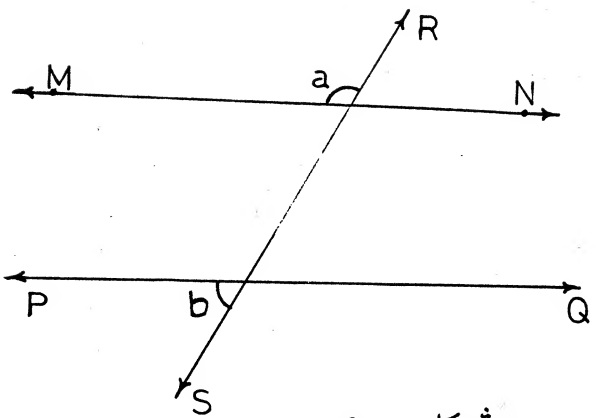
2 - اگرخطوط موازی AB و CD توسط قاطع XY قطع شده باشند ثبوت نمائید که $\hat{a} = \hat{b}$ است . شکل (2 - 17)



شکل (2 - 17)

3 - درشکل (2-18) $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{MN}$ است .

ثبوت نمائید که $\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$ می باشد .

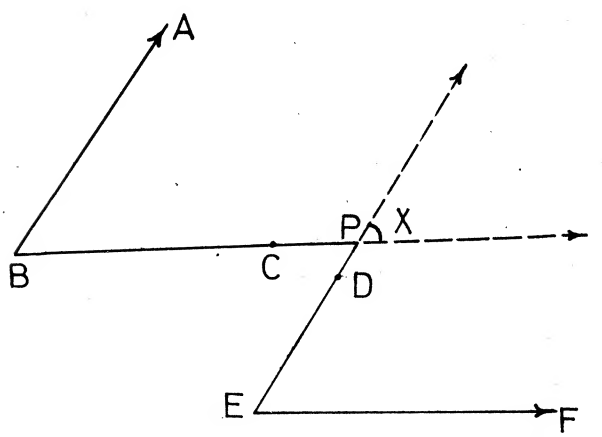


شکل (2 - 18)

2 - 6 :- خواص دو زاویه ایکه اضلاع آنها موازی وهم جهت ویا موازی ومخالف الجهت باشد :-

1 - 6 - 2 : قضیه اول :- هرگاه اضلاع دوزاویه به ترتیب موازی وهم جهت باشند آن دوزاویه با هم مساویست .

مفروض :- درزوایای ABC و DEF ، $\overrightarrow{BC}$ با $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BA}$ با $\overrightarrow{ED}$ موازی وهم جهت است شکل (2 - 19) .



مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که : $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ میباشد.

ثبوت :- $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ED}$ یکدیگر را خود را در نقطه P قطع مینماید بدین ترتیب $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{EP}$ می شود پس به اساس تطبیق -

قضیه ۱ 2-5-2 ، نوشته می توانیم که $\hat{ABC} = X$ I

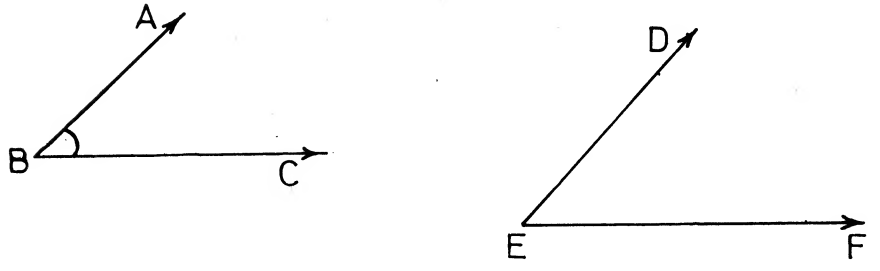
چون $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{EF}$ است پس به اساس قضیه ۱ 2-5-2 ، داریم که :

$$\hat{DEF} = \hat{X} \text{ ..... II}$$

از مقایسه مساوات I و II بدست میاید که

$$\hat{ABC} = \hat{DEF}$$

مثال :- در شکل ۱ 2-20 ، $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ و $\hat{E} = 60^{\circ}$ است . وسعت زاویه B را دریافت نمائید .



شکل ۱ 2-20 ،

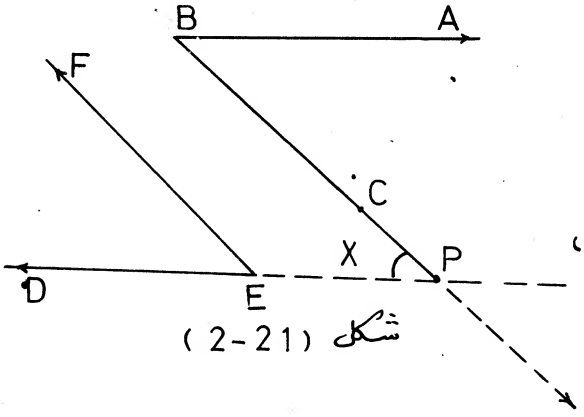
حل :- چون $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{ED}$ موازی وهم جهت و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{EF}$ موازی وهم جهت است بناءً باساس تطبیق قضیه ۱ 2-6-1 ، $\hat{B} = \hat{E} = 60^{\circ}$ می باشد .

2-6-2. **قضیه دوم** :- هرگاه اضلاع دو زاویه به ترتیب باهم موازی و مخالف الجهت باشد آن دو زاویه باهم مساویست .

مفروض :- در زوایای ABC و DEF ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{EF}$ موازی و مخالف الجهت و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{ED}$ موازی و مخالف الجهت است .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ می باشد.

ثبوت :- $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DE}$ یکدیگر را در نقطه P قطع می نماید بدین ترتیب $\overrightarrow{BA}$ همرای $\overrightarrow{EP}$ موازی میشود. به اساس تطبیق قضیه (1-5-2) نوشته کرده می توانیم که :



شکل (2-21)

$$\hat{ABC} = \hat{X} \quad \ldots\ldots I$$

چون $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{EF}$ است.

بناً باساس تطبیق قضیه (2-5-2) نوشته کرده می توانیم که :

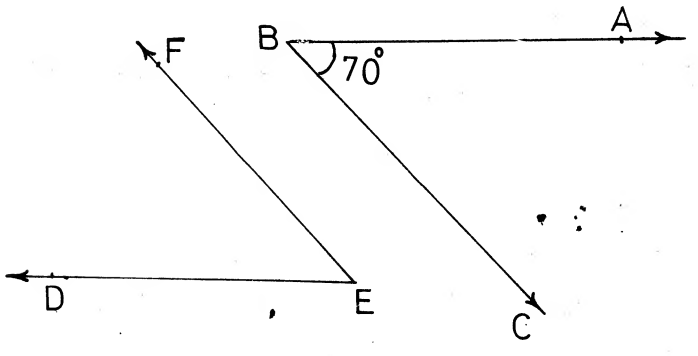
$$\hat{DEF} = \hat{X} \quad \ldots\ldots II$$

ازمقایسه مساوات I و II مطلوب بدست می آید یعنی :

$$\hat{ABC} = \hat{DEF}$$

مثال :- درشکل (2-22) $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{EF}$ است وسعت زاویهٔ $B = 70^\circ$ است وسعت زاویهٔ $\hat{E}$ را پیدا نمائید.

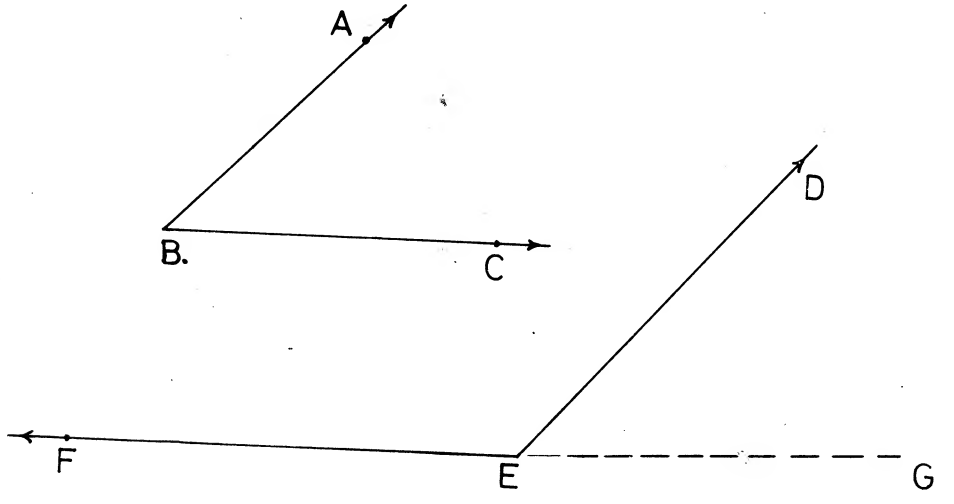
حل :- چون اضلاع $\hat{ABC}$ و $\hat{DEF}$ موازی ومخالف الجهت است بناً به اساس تطبیق قضیه (2-6-2) زاویه $\hat{E} = \hat{B} = 70^\circ$ می باشد.



شکل (2-22)

2-6-3 : **قضیه سوم** :- هرگاه دوزاویه دوضلع موازی وهم‌جهت و دوضلع موازی ومخالف‌الجهت داشته باشندزوایای مذکورمتمم یکدیگرمیباشند.

مفروض : درزوایای ABC و DEF ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DE}$ موازی وهم جهت و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{EF}$ موازی ومخالف‌الجهت اند .



شکل (2-23)

مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که :

$$\hat{ABC} + \hat{DEF} = 180^\circ$$

ثبوت :- ضلع $\overrightarrow{EF}$ را ازنقطه E بطرف راست امتدادمیدهیم درینصورت $\hat{DEG}$ که با $\hat{ABC}$ اضلاع موازی وهم‌جهت رادارد تشکیل میگردد به اساس تطبیق قضیه (1-6-2) ، نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{DEG} = \hat{ABC} \cdots\cdots I$$

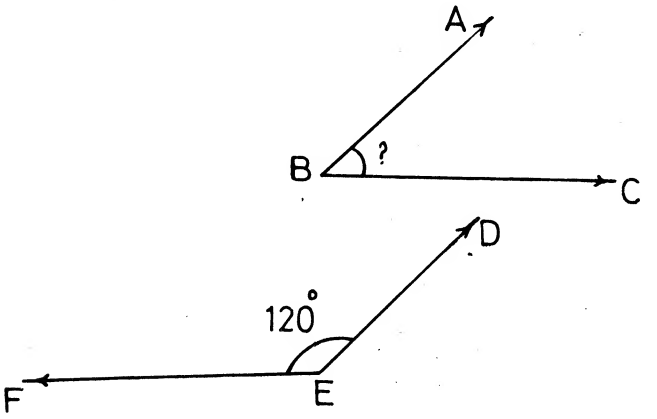
وهم‌چنان ،

$$\hat{DEG} + \hat{DEF} = 180^\circ \cdots\cdots II$$

به عوض $\hat{DEG}$ زاویه مساوی آنرا در رابطه II وضع نموده مطلوب بدست میآید یعنی :

$$\hat{ABC} + \hat{DEF} = 180^\circ$$

مثال :- درشکل (24 - 2) $\overrightarrow{EF} // \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{ED}$ است هرگاه زاویه $\hat{E}$ مساوی 120° باشد وسعت زاویه $\hat{B}$ را معلوم نمائید .



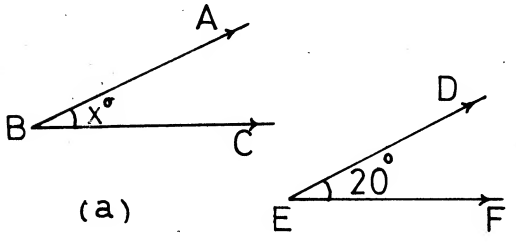
شکل (24 - 2)

حل :- چون $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BC}$ موازی ومخالف الجهت و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{ED}$ موازی وهم جهت است . پس $\hat{B} + \hat{E} = 180^\circ$ ازینجا وسعت زاویه B

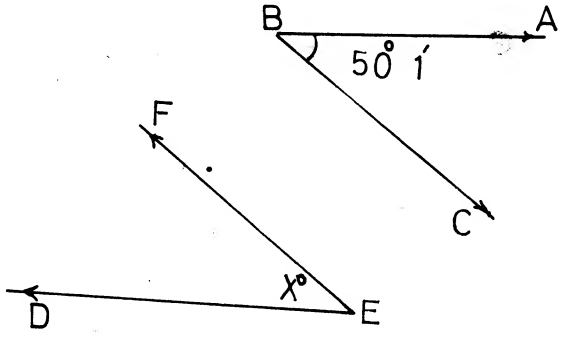
$$\hat{B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

تمرین :- 4-2 :-

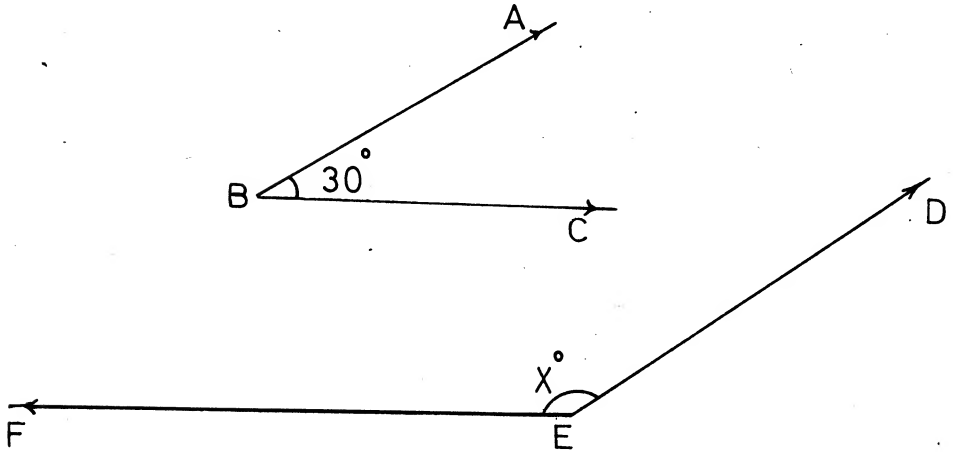
درهرجزء اشکال آتی $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{ED}$ و $BC // EF$ است اندازهٔ $\hat{X}$ را تعین نمائید .



(a)



(b)



(c)

شکل (2-25)

تمرینات عمومی فصل دوم

گروپ اول :

در سوالات آتی در مقابل هر سوال چهار جواب داده شده دو جواب صحیح را حلقه نمائید .

1 - دو زاویهٔ داخلی ایکه یکی آن به یکطرف قاطع و دیگر آن به طرف دیگر قاطع واقع بوده و رأس مشترک نداشته باشند .

a - زوایای متبادلهٔ داخلی است b - زوایای متبادله خارجی است .

c - زوایای متوافقه است . d - هیچکدام .

2 - هرگاه دو خط مستقیم با یک قاطع زوایای متوافقه مساوی بسازند .

a - یکدیگر خود را قطع می نمایند . b - در بین خود موازی میباشند .

c - بالای یکدیگر منطبق اند . d - b و c صحیح است .

3 - هرگاه یک قاطع دو خط موازی را قطع نمایند مجموعه وسعت زوایای داخلی ایکه به یکطرف قاطع بوجود می آیند مساویست به .

a - 90° b - 360° c - 180° d - 270°

4 - از یک نقطهٔ خارجی یک خط مستقیم بآن خط :

a - فقط و فقط یک خط موازی رسم شده می تواند .

b - دو خط موازی رسم شده می تواند .

c - هیچ خط موازی رسم شده نمی تواند . d - چهار خط موازی رسم شده می تواند .

5 ـ هرگاه دو زاویه دو ضلع موازی وهم جهت ودو ضلع موازی و مخالف الجهت داشته باشد زوایای نامبرده :

a ـ مجاور یکدیگراند . b ـ مکمل یکدیگراند .

c ـ متمم یکدیگراند . d ـ هیچکدام .

گروپ دوم :

درافاده های آتی کدام آن صحیح وکدام یک آن غلط است .

1 ـ خطوطیکه روی یک مستوی واقع بوده و امتداد شان به هردوطرف یکدیگرخودرا قطع ننمایندخطوط موازی نامیده میشوند .

2 ـ دوزاویهٔ ایکه بهیکطرف قاطع واقع بوده یکی آن داخلی ودیگر آن خارجی باشد بنام زوایای متوافقه یادمیگردد .

3 ـ هرگاه دوخط مستقیم بایک قاطع دوزاویهٔ یکطرفه داخلی مکمله بسازند دربین خودموازی اند .

4 ـ هرگاه یک خط مستقیم دوخط موازی را قطع نماید وسعت زوایای متبادلهٔ داخلی ایکه پیدا میشود باهم مساوی است .

5 ـ هرگاه اضلاع دوزاویه به ترتیب موازی وهم جهت باشندآن دوزاویه باهم مساوی نیست .

گروپ سوم :

جاهای خالی را با کلمات مناسب پُرنمائید .

1 ـ هرگاه یک خط مستقیم یک یا چند مستقیم دیگررا قطع نماید بنام ..... یادمیگردد .

انتقال پذیر است .

7 - هر قطعه خط یک نقطهٔ وسطی دارد .

8 - هر زاویه یک ناصف دارد .

9 - یک خط مستقیم را به هر اندازه که خواسته باشیم به هردو طرف امتداد داده می توانیم .

10 - هرگاه دو مقدار با مقدار سومی مساوی باشد در بین خود نیز مساوی میباشند .

11 - اگر با هریک از دو مقدار مساوی یک مقدار سومی اضافه گردد مجموعهٔ آنها نیز در بین خود مساوی میباشد .

12 - اگر از هردو مقدار مساوی یکمقدار سومی کم شود باقیمانده شان در بین خود نیز مساوی میباشد .

13 - اگر با هریک از دو مقدار غیر مساوی یکمقدار سوم اضافه شود مجموعهٔ آنها با هم مساوی نمیباشد .

14 - هر کل از جز خود بزرگتر است .

صحت وحقیقت مفاهیم بالا بدون دلیل وبرهان قابل قبول است و تهداب هندسهٔ مسطحه ویا هندسهٔ اقلیدس را تشکیل میدهد صحت وحقیقت علم هندسه مسطحه بدون این دلایل ویا مفاهیم معادل آن قابل قبول نبوده وناممکن است .

1-2 . قضیه :

قضیه مفهوم ویا مفکوره ایست که صحت وحقیقت آن به اساس اصول موضوعه توسط یکعده استدلال ها ودلایل منطقی اثبات شود ویا مفاهیمی

2 ـ دو زاویه ایکه به یکطرف قاطع واقع بوده یکی آن داخلی و دیگرش ..... وراس مشترک نداشته باشند ..... نامیده میشود.

3 ـ هرگاه دو خط مستقیم با یک قاطع زوایای متبادله مساوی بسازند آن دو خط در بین خود ..... است .

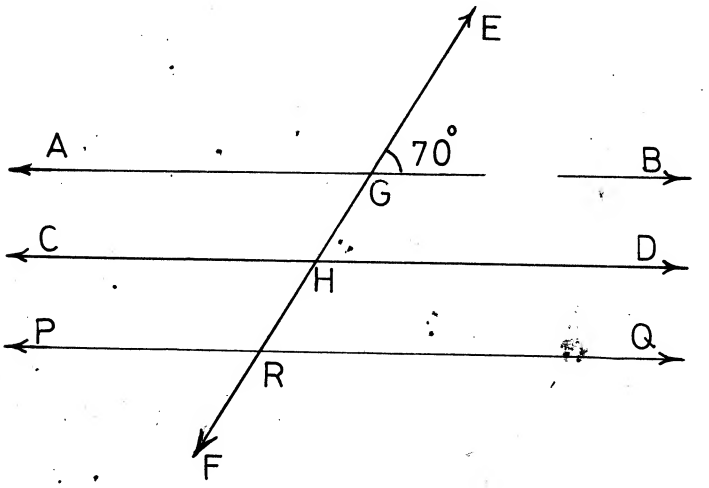
4 ـ هرگاه دو خط مستقیم باهم موازی باشند هر قاطع همرای آنها زوایای ..... یکطرفه داخلی می سازند .

5 ـ هرگاه اضلاع دو زاویه به ترتیب در بین خود موازی و مخالف الجهت باشد زوایای مذکور ..... میباشند .

گروپ چهارم :ـ

در شکل (2-26) $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$ $\overleftrightarrow{CD}//\overleftrightarrow{PQ}$ $\hat{BGE} = 70^\circ$

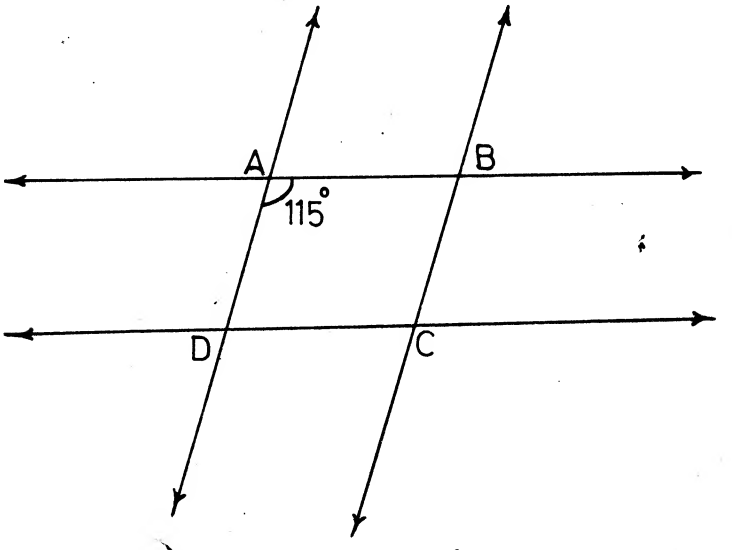
است وسعت زوایای $\hat{GHC}$ ، $\hat{QRH}$ و $\hat{PRF}$ را معلوم نمائید .



شکل (2-26)

2- درشکل (2-27) ، هرگاه $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BC}$

و $B\hat{A}D = 115^\circ$ باشد وسعت زوایای ADC و BCD رامعلوم نمائید.



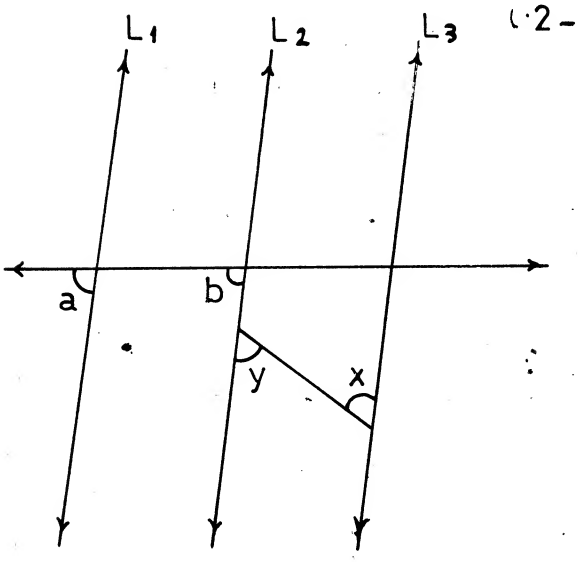
شکل (2-27)

3- درشکل (2-28)

$\hat{X} = \hat{Y}$ و $\hat{a} \cong \hat{b}$

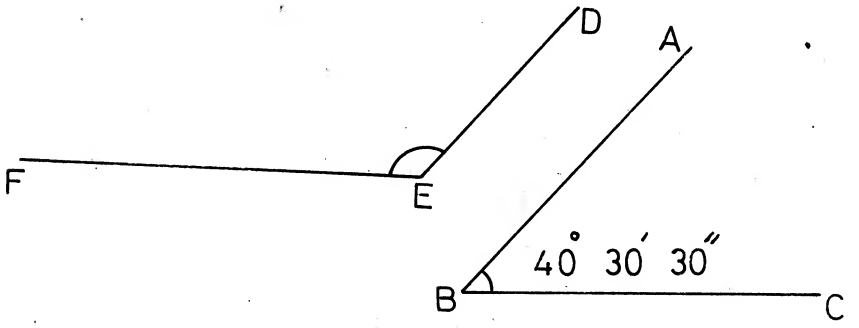
است ثبوت نمائید که

$L_1 // L_3$ است.



شکل (2-28)

4 ـ درشکل (2 - 29) $\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{EF}$ است وسعت زاویه DEF را معلوم نمائید .



شکل (2 - 29)

5 ـ ثبوت نمائید که هرگاه یک خط مستقیم بالای یکی ازدوخط موازی عمود باشد بالای دیگرآن نیزعمود است .

6 ـ شکل (2 - 30) را درنظرگرفته آیا $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ است در صورتیکه :

a ـ $\hat{4} = 60^\circ$ و $\hat{6} = 60^\circ$ باشد

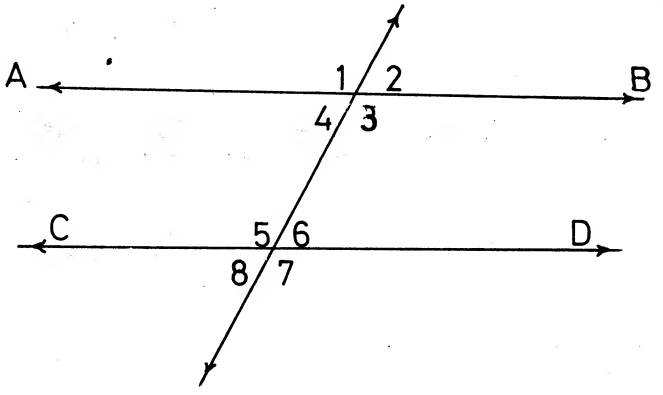
b ـ $\hat{1} = 100^\circ$ و $\hat{5} = 110^\circ$ باشد

c ـ $\hat{2} = 80^\circ$ و $\hat{8} = 80^\circ$ باشد

d ـ $\hat{3} = 110^\circ$ و $\hat{8} = 60^\circ$ باشد

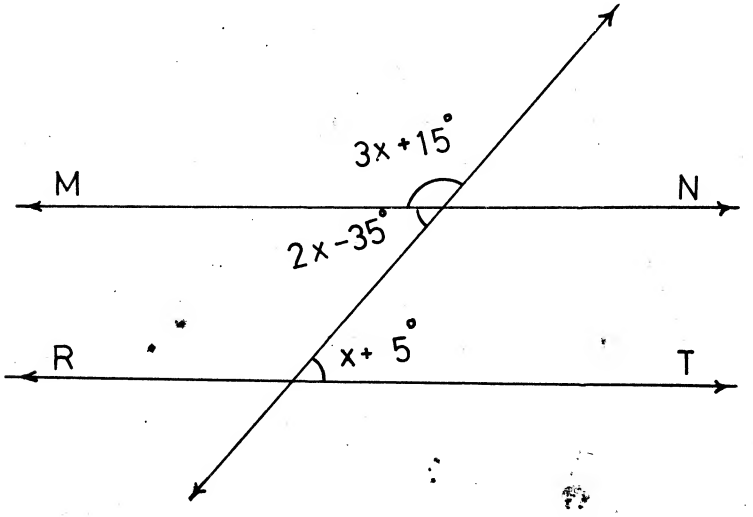
e ـ $\hat{3} = 110^\circ$ و $\hat{6} = 70^\circ$ باشد

f ـ $\hat{1} = 100^\circ$ و $\hat{8} = 100^\circ$ باشد



شکل (2 - 30)

7 - شکل (2 - 31) را در نظر گرفته آیا $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{RT}$ است ؟ دلیل آنرا بگوئید .



شکل (2 - 31)

فصل سوم
خواص اضلاع وزوایای مثلث

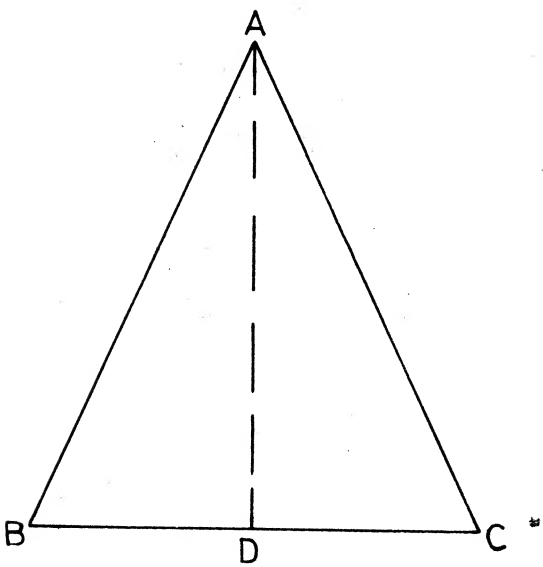
3-1 روابط بین اضلاع وزوایای یک مثلث .

3-1-1 قضیه اول :- هرگاه دو ضلع یک مثلث باهم مساوی باشند زوایای مقابل آن دو ضلع نیز باهم مساوی میباشد .

مفروض :- در مثلث ABC ، $\overline{AB} = \overline{AC}$ است .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که $\hat{B} = \hat{C}$ می باشد .

ترسیم :- نقطه وسطی ضلع BC را D نامیده وآنرا به A وصل می نمائیم .



شکل ، 3-1 ،

ثبوت :- از مقایسهٔ مثلث های ABD و ACD داریم که

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ..... فرضیه

$\overline{BD} = \overline{DC}$ ..... D نقطه وسطی $\overline{BC}$ است

ضلع مشترک $\overline{AD} = \overline{AD}$

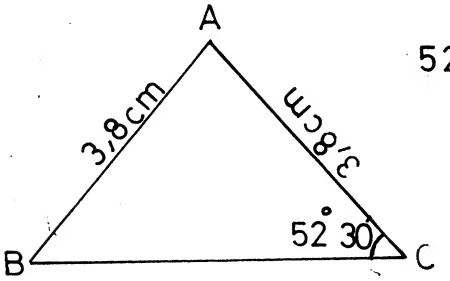
ازمساوات های بالا نوشته کرده می توانیم که :

$$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$$

درنتیجه بدست می آید که : $\boxed{\hat{B} = \hat{C}}$

مثال :- درمثلث ABC ، $\hat{C} = 52^\circ\ 30'$ و $\overline{AB} = \overline{AC} = 3{,}8cm$ میباشد وسعت زاویه B را معلوم نمائید . شکل (3-2)

حل :- به اساس قضیه (3-1-1) وسعت زاویه B مساوی به $52^\circ\ 30'$ میباشد . $\hat{B} = 52^\circ\ 30'$



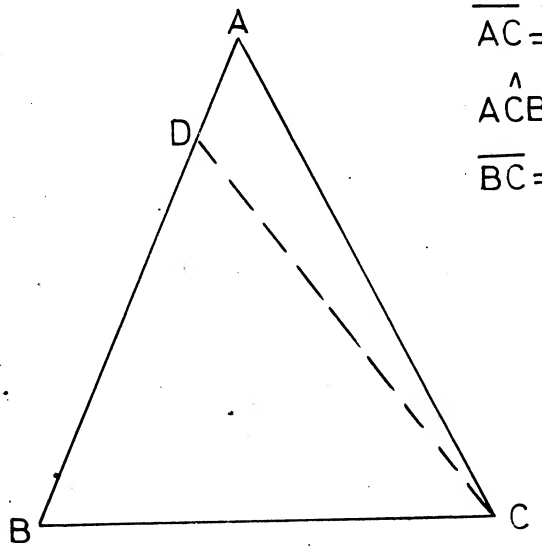
شکل (3-2)

3-1-2 قضیه دوم :- هرگاه دو زاویه یک مثلث باهم مساوی باشند اضلاع مقابل آن دو زاویه نیز باهم مساویست .

مفروض :- درمثلث ABC زوایای ABC و ACB آن باهم مساویست .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که $\overline{AB} = \overline{AC}$ میباشد .

ثبوت :- اگر $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ باهم مساوی نبوده ویکی از آنها فرضاً $\overline{AB}$ بزرگتر از $\overline{AC}$ باشد دریصورت $\overline{BD}$ را باندازه $\overline{AC}$ از $\overline{AB}$ جدا مینمائیم مثلث های ABC و BCD را باهم مقایسه می کنیم .



ترسیم ..... $\overline{AC}=\overline{BD}$

فرضیه ..... $\hat{ACB}=\hat{CBD}$

ضلع مشترک ..... $\overline{BC}=\overline{BC}$

شکل (3-3)

ازروابط بالا نتیجه می گیریم که :

$$\hat{ABC} \cong \hat{BCD}$$

رابطهٔ بالا امکان ندارد بجا طریکه $\hat{BCD}$ جز $\hat{ABC}$ است این رابطه زمانی امکان داردکه ضلع CD بالای ضلع AC ونقطه D بالای نقطه A منطبق شودکه درینصورت .

$$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{AB}$$ می شود .

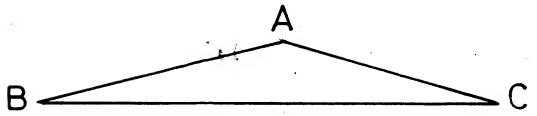
بدین لحاظ فرضیه ایکه $\overline{AB}$ بزرگتراز $\overline{AC}$ باشد امکان ندارد به همین ترتیب ثبوت نموده می توانیم که $\overline{AC}$ هم از $\overline{AB}$ بزرگترشده نمی تواند در نتیجه بدست میآید که :

$$\overline{AB}=\overline{AC}$$ می باشد

مثال :- درشکل (3-4) $\hat{B}=\hat{C}=30^\circ$ و $\overline{AB}=2,9cm$

می باشد طول ضلع AC چند سانتی متر است .

حل :- قوار قضیه (2-1-3) که در مقابل زوایای مساوی اضلاع مساوی قرار دارند نوشته کرده - می توانیم که :



شکل (4 - 3)

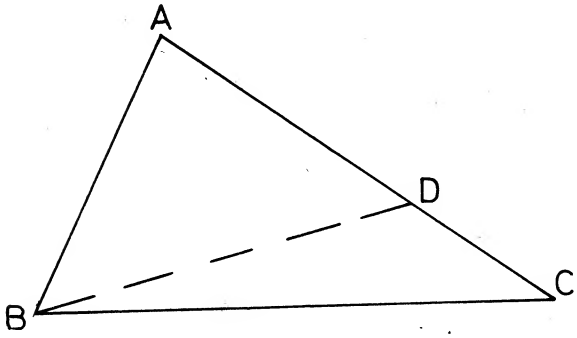
$\overline{AC} = \overline{AB} = 2{,}9\,cm$

3-1-3 . **قضیه سوم** :- در هر مثلث زاویه ایکه در مقابل ضلع بزرگ واقع گردیده بزرگتر است از زاویه ایکه در مقابل ضلع کوچک قرار دارد .

مفروض :- در مثلث ABC $\overline{AB} < \overline{AC}$ است شکل (5 - 3) .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که $A\hat{C}B < C\hat{B}A$ می باشد .

ثبوت :- چون $\overline{AC}$ بزرگتر از $\overline{AB}$ است بناً $\overline{AD}$ را به اندازهٔ $\overline{AB}$ از ضلع AC جدا می نمائیم بعداً رأس B را به نقطه D وصل نموده مثلث ABD بوجود میآید که $\overline{AB} = \overline{AD}$ است بناً باساس قضیه (1-1-3) نوشته کرده می توانیم که $D\hat{B}A = A\hat{D}B$ می باشد .



شکل (5-3)

$A\hat{D}B$ زاویه خارجی ΔBDC است لذا به اساس قضیه (1-3-1a) نوشته کرده می توانیم که :

$$A\hat{C}B < A\hat{D}B \quad \text{..... II}$$

در رابطهٔ I به عوض $\hat{ADB}$ زاویه مساوی آن یعنی $\hat{DBA}$ را وضع می کنیم .

$$\hat{ACB} < \hat{DBA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II}$$

فظ به شکل رابطهٔ ذیل را نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{DBA} \angle \hat{CBA} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{III}$$

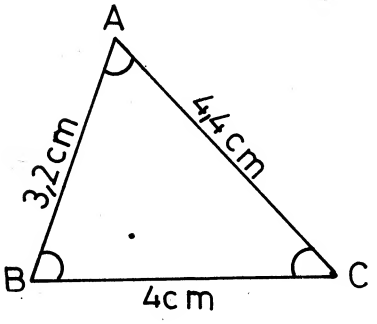
از مقایسه رابطه II و III نتیجه بدست می آید که :

$$\hat{ACB} < \hat{CBA}$$

مثال :- درشکل (3 - 6) ، $\overline{AC} = 4{,}4\,cm$ ، $\overline{AB} = 3{,}2\,cm$ و $\overline{BC} = 4cm$ است زوایای مثلث مذکور را مقایسه نمائید.

حل :- باساس تطبیق قضیه (3-1-3) نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{C} < \hat{A}$$
$$\hat{A} < \hat{B}$$
$$\hat{C} < \hat{B}$$



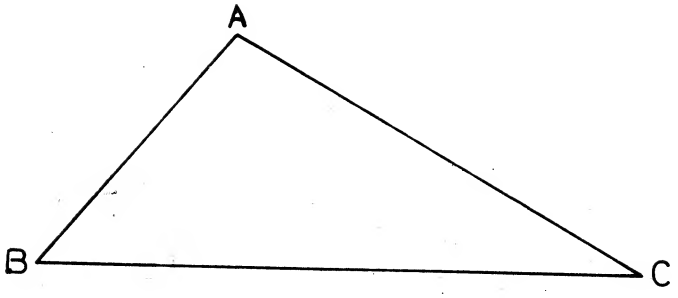
شکل (3 - 6)

3-1-4 . **قضیه چهارم** :- درهرمثلث ضلع ایکه درمقابل زاویه بزرگ قرار داشته باشد بزرگتر است از ضلع ایکه درمقابل زاویه کوچک قرار دارد .

مفروض :- درمثلث ABC زاویهٔ ACB کوچکتر از زاویهٔ CBA است

مطلوب :- ثبوت مینمائیم که :

$\overline{AB} < \overline{AC}$ می باشد



مشکل ، 7 - 3 ،

ثبوت :- اگر $\overline{AB} < \overline{AC}$ نباشد پس $\overline{AB} = \overline{AC}$ ویا $\overline{AB} > \overline{AC}$ است . اگر $\overline{AB} = \overline{AC}$ باشد درینصورت باساس قضیه ، 1-1-3 ، نوشته کرده می توانیم که : $\hat{CBA} = \hat{ACB}$ I

درحالیکه رابطه ،I، مخالف فرضیه است پس $\overline{AB} = \overline{AC}$ امکان ندارد.

اگر $\overline{AB} > \overline{AC}$ باشد درینصورت نظربه اساس قضیه ، 3-1-3 ، رابطهٔ آتی صحیح است .

$$\hat{CBA} < \hat{ACB} \quad \text{..... II}$$

درحالیکه رابطهٔ II نیز مخالف فرضیه است بناً $\overline{AB} > \overline{AC}$ نیز حقیقت ندارد.

چون هردو روابط $\overline{AB} > \overline{AC}$ و $\overline{AB} = \overline{AC}$ امکان ناپذیر است لذا ضرور باید $\overline{AB} < \overline{AC}$ باشد .

مثال :- در شکل ، 8 - 3 ، اگر $\hat{A} = 50^\circ$ ، $\hat{B} = 70^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ باشد درینصورت اضلاع مثلث ABC را مقایسه نمائید.

حل :- نظربه تطبیق قضیه ، 4-1-3 ، نوشته کرده می توانیم که :

که برای تثبیت صحت وحقیقت آنها به یکعده دلایل منطقی ضرورت باشد قضیه گفته میشود . فرق بین قضیه واصول موضوعه درین است که :

اصل موضوعه یکُ مفهوم ساده ایست که برای صحت وحقیقت آن به آوردن دلایل ضرورت نیست ، درحالیکه قضیه آن مفهومی است که **برای تثبیت صحت وحقیقت آن به دلایل منطقی ضرورت میباشد** .

بطورعموم هرقضیه دارای دوقسمت میباشد . قسمت اول آن فرضیه (شرطیه) وقسمت دوم آن مطلوب (حکم) ویا نتیجهٔ آن است .

1-2-1. **فرضیه ویا شرطیه** :- آن قسمت قضیه راگویندکه بصورت عموم توسط کلمهٔ « اگر ویا هرگاه » آغاز میگردد .

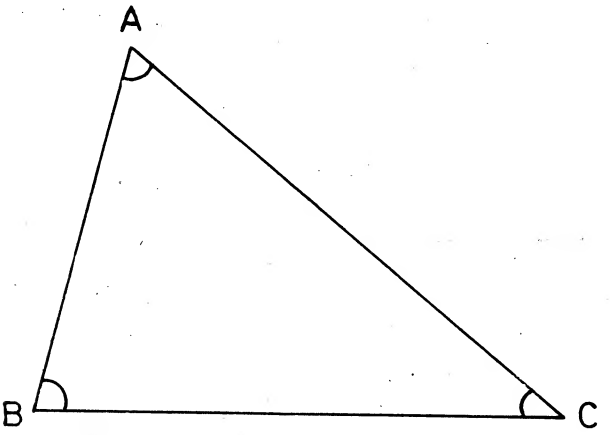
2-2-1 **حکم یا مطلوب ویا نتیجه** :- آن قسمت قضیه میباشدکه توسط کلمهٔ « پس » شروع میشود .

مثال : هرگاه دوضلع وزاویهٔ مابینی یکُ مثلث بادوضلع وزاویه مابینی مثلث دیگرمساوی باشد پس آن دو مثلث باهم انطباق پذیراند .

درمثال بالائی « دوضلع وزاویهٔ مابینی یکُ مثلث مساوی با دو ضلع وزاویهٔ مابینی مثلث دیگر» فرضیه و«هردو مثلث باهم انطباق پذیراند » - مطلوب،حکم ویا نتیجهٔ قضیه است .

باید شاگردان فرضیه وحکم هرقضیه راتشخیص کرده بتوانند و بشناسند ودرین کارخود راعادی سازند .

بعضی از قضایا توسط کلمهٔ هرگاه ویا اگر شروع نگردیده وحتی هم نیست که هرقضیه توسط کلمه اگر ویا هرگاه شروع شود ، بعض اوقات کلمهٔ اگر



$\overline{BC} < \overline{AB}$

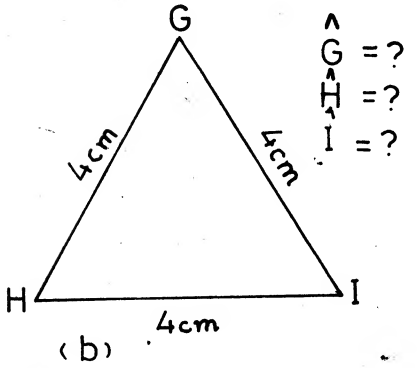
$\overline{AB} < \overline{AC}$

$\overline{BC} < \overline{AC}$

شکل (3 - 8)

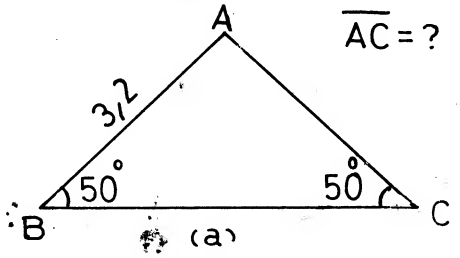
تمرین (3-1) :

1 - دراشکال ذیل اضلاع وزوایای نامعلوم را دریافت نمائید .



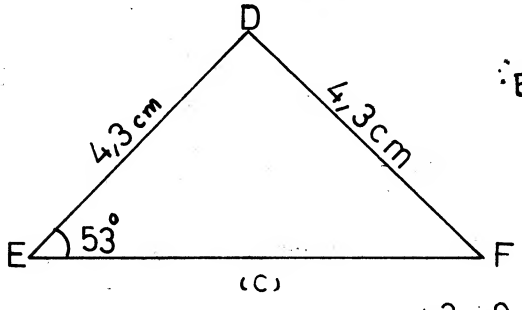
$\hat{G} = ?$
$\hat{H} = ?$
$\hat{I} = ?$

(b)



$\overline{AC} = ?$

(a)

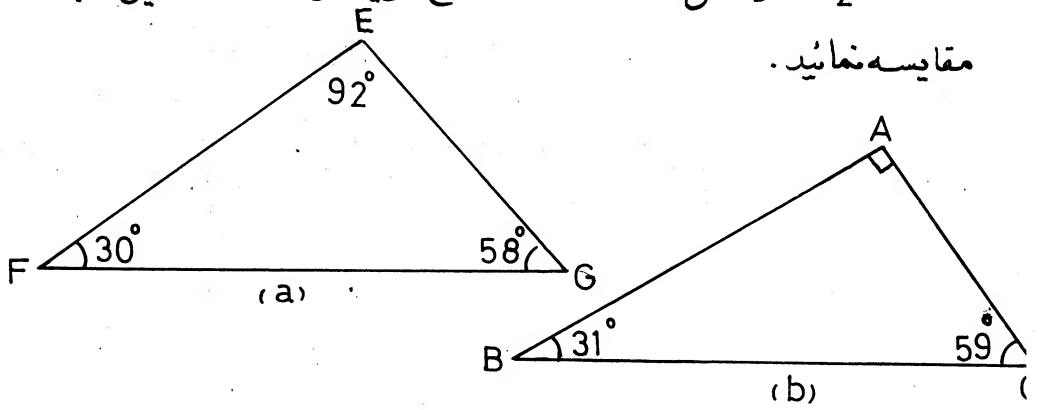


$\hat{F} = ?$

(c)

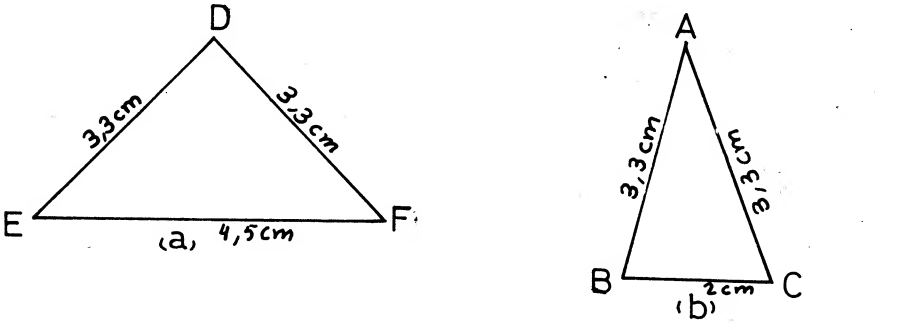
شکل (3 - 9)

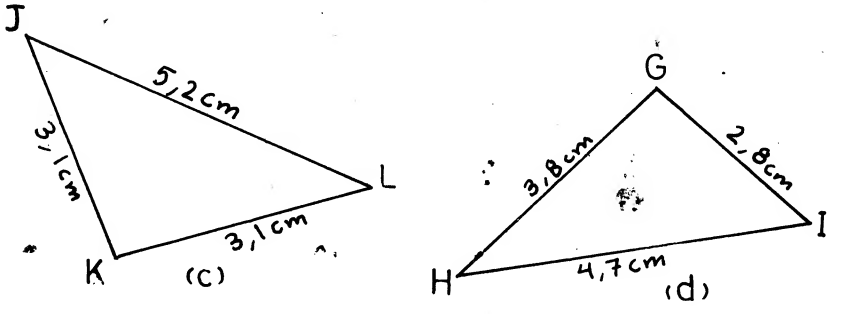
2 ـ درشکل (3-10) اضلاع هریک ازمثلث های ذیل را با هم مقایسه نمائید.



شکل (3-10)

3 ـ درشکل (3-11) زوایای هریک ازمثلث ها را با هم مقایسه نمائید.





شکل (3-11)

4 - اگر نقطهٔ وسطی قاعده یک مثلث متساوی الساقین به راس مقابل آن وصل شود ثبوت نمایید که خط مذکور زاویهٔ راس مثلث را تنصیف مینماید .

5 - اگر در مثلث های متساوی الساقین ABC و DBC قاعدهٔ BC را مشترک در نظر بگیریم ثبوت نمایید که :

$$\hat{DBA} = \hat{ACD}$$

درصورتیکه راس A و D بدوطرف قاعدهٔ $\overline{BC}$ واقع شده باشد .

6 - نشان دهید که در هر مثلث قایم الزاویه طول وتر آن بزرگتر است از طول اضلاع قایم آن .

7 - اگر قاعدهٔ BC مثلث متساوی الساقین ABC را بانقطه D امتداد داده وبعداً D را به A وصل نمائیم ثبوت نمایید که طول $\overline{AD}$ طویلتر است از طول ساق های مثلث ABC .

3-2 . خاصیت اضلاع مثلث :

درصنف هفتم خوانده بودیم که یک مثلث زمانی رسم شده می تواند که مجموع طول دو ضلع آن بزرگتر از طول ضلع سوم آن باشد فعلاً ثبوت می نمائیم که در هر مثلث مجموعهٔ طول دو ضلع بزرگتر از طول ضلع سوم آن میباشد .

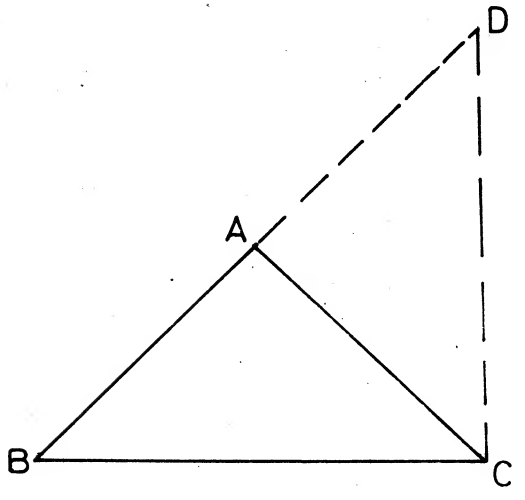
3-2-1 . قضیه : - در هر مثلث مجموعه طول دو ضلع آن زیاد تر از طول ضلع سوم آن میباشد .

مفروض : - مثلث ABC را طوری در نظر گیریم که ضلع BC طویلترین ضلع مثلث مذکور باشد .

مطلوب : می خواهیم ثبوت نمائیم که :

$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$

ثبوت :- ضلع AB را تا نقطه D طوری امتداد میدهیم که $\overline{AD} = \overline{AC}$ شود



شکل (3 - 12)

بعداً D را به C وصل می نمائیم

چون $\overline{AD} = \overline{AC}$ است پس با

استفاده از قضیه (1- 1-3)

نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{ADC} = \hat{DCA}$$

از طرف دیگر نظر به شکل معلوم میشود که:

$$\hat{DCA} < \hat{DCB}$$

در رابطه بالا بعوض DCA ، ADC را

وضع می نمائیم یعنی :

$$\hat{ADC} < \hat{DCB}$$

یا

$$\hat{BDC} < \hat{DCB}$$

نظر به اساس قضیه (4 - 1 - 3) ، رابطه ذیل را نوشته کرده می توانیم که : $\overline{BC} < \overline{BD}$

چون $\overline{BD} = \overline{DA} + \overline{AB}$ میباشد پس :

$$\overline{BC} < \overline{DA} + \overline{AB}$$

اگر به عوض $\overline{DA}$ قیمت مساوی آن یعنی $\overline{AC}$ در رابطهٔ بالا وضع شود چنین

نتیجه بدست می آید که :

$$\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$$

3-3- مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث :

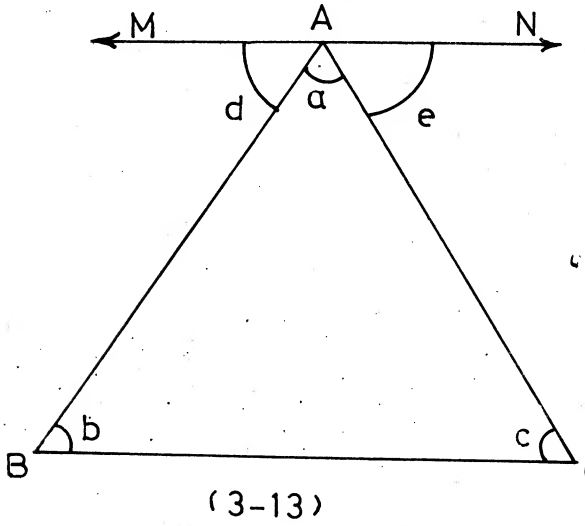
در صنف هفتم مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث را در دو تجربه نشان دادیم که دو قایمه میباشد درین قسمت میخواهیم که آنرا به کمک موازات ثبوت نمائیم .

1-3-3. قضیه :- مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث دو قایمه میباشد.

معزوض :- مثلث ABC داده شده

مطلوب :- می خواهیم ثبوت نمائیم که :

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^{\circ}$$



(3-13)

ترسیم :- در شکل (3-13) مستقیم MN را موازی به $\overline{BC}$ رسم می نمائیم .

ثبوت :- چون $\overleftrightarrow{MN} // \overline{BC}$

است بنا ً مساوات ذیل را نوشته کرده می توانیم :

$\hat{b} = \hat{d}$ ..... قوار زوایای متبادله .

$\hat{e} = \hat{c}$ ..... " " "

از طرف دیگر :

در شکل (3 - 13) رابطه ذیل موجود است :

$\hat{a} + \hat{d} + \hat{e} = 180^{\circ}$ ..... *

اگر در رابطه (*) قیمت های مساوی $\hat{e}$ و $\hat{d}$ وضع شود مطلوب بدست

میآید یعنی :

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

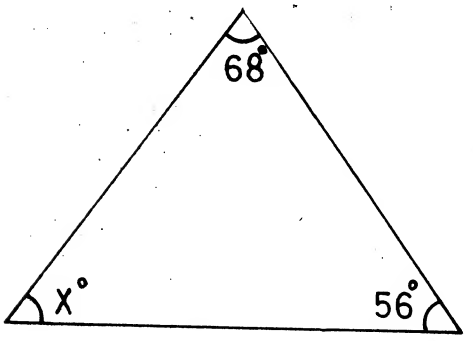
مثال درشکل (14 - 3) ، قیمت (X) ، را معلوم نمائید .

حل : قیمت (X) ، را با استفاده از قضیه (1 - 3 - 3) ، چنین بدست می‌آوریم که :

$$\hat{X} = 180^\circ - (68^\circ + 56^\circ)$$

یا

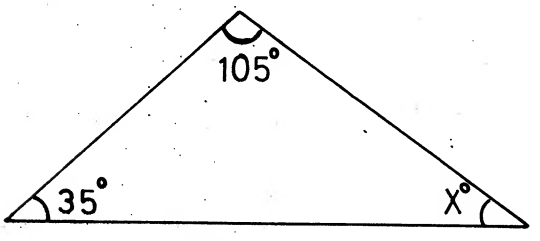
$$\hat{X} = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$$



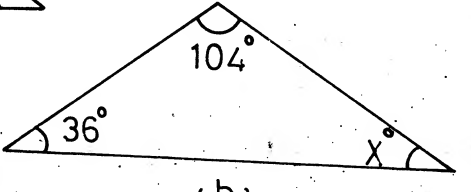
شکل (14 - 3)

تمرین 2 - 3 :-

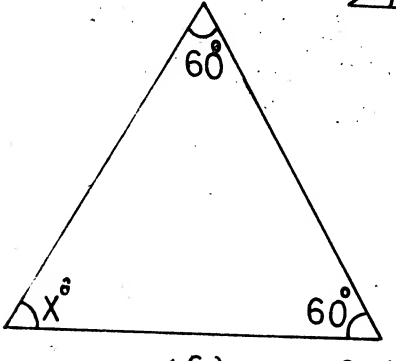
1 - قیمت (X) ، را بدست آرید .



(a)



(b)



(c)

شکل (15 - 3)

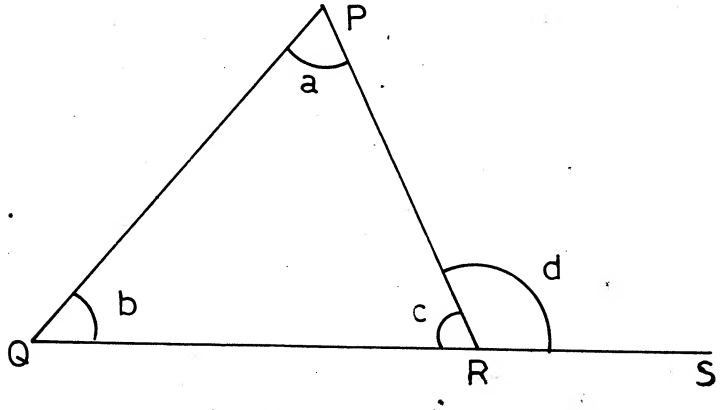
2 ـ ثبوت نمائید که وسعت هریک از زوایای مثلث متساوی الاضلاع $\frac{2}{3}$ قایمه یا 60° درجه است .

3 ـ درمثلث ABC وسعت زاویهٔ $\hat{B}$ دوچند وسعت زاویهٔ $\hat{A}$ و وسعت زاویهٔ $\hat{C}$ سه چند وسعت زاویه $\hat{A}$ است وسعت هرکدام آنرا به درجه معلوم نمائید .

4 ـ وسعت زوایای یک مثلث متساوی الساقین را درصورتی محاسبه نمائید که وسعت هریک از زوایای قاعده آن چهارچند وسعت زاویهٔ راس آن باشد.

4-3. خواص زوایای خارجی مثلث .

1-4-3. قضیه اول :ـ وسعت هریک از زوایای خارجی یک مثلث مساوی به مجموع وسعت زوایای غیرمجاور داخلی آن میباشد .



شکل (3-16)

مفروض :ـ درشکل (3-16) $\hat{d}$ زاویه خارجی مثلث و $\hat{a}$ و $\hat{b}$ زوایای داخلی وغیرمجاور $\hat{d}$ اند .

مطلوب :ـ ثبوت می نمائیم که : $\hat{d} = \hat{a} + \hat{b}$ میباشد.

ثبوت :- زوایای مجاوره به یکطرف خط ..... $\hat{C} + \hat{d} = 180^\circ$

مجموع زوایای داخلی یک مثلث ..... $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$

از مقایسه مساوات بالا داریم که :

$\hat{c} + \hat{d} = \hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ ..... *

اگر از هردو طرف رابطه (*) ، ($\hat{c}$) را تفریق نمائیم چنین نتیجه بدست میاید که :

$$\boxed{\hat{d} = \hat{a} + \hat{b}}$$

مثال :- درشکل (3 - 17) ، $B\hat{A}C = 50^\circ$ ، $A\hat{C}B = 60^\circ$ است وسعت زوایای ABC و DCA را معلوم نمائید .

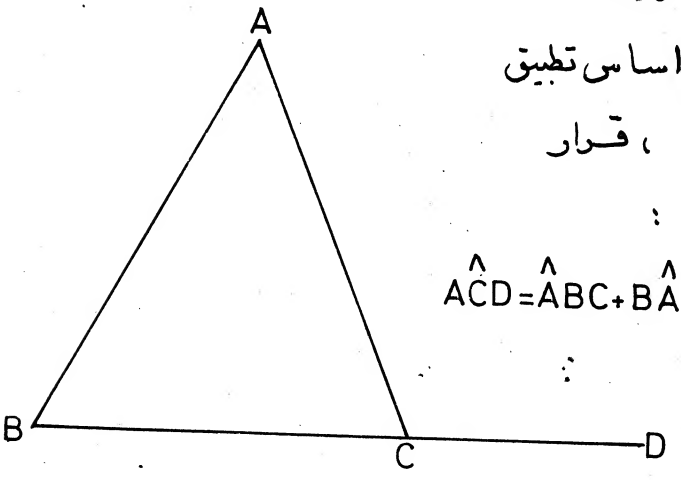
حل :- ازقضیه (1 - 3 - 3) داریم که :

$$A\hat{B}C = 180^\circ - (50^\circ + 60^\circ)$$

$$= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

وسعت زاویه ACD براساس تطبیق قضیه (1 - 4 - 3) قرار آتی بدست میآید :

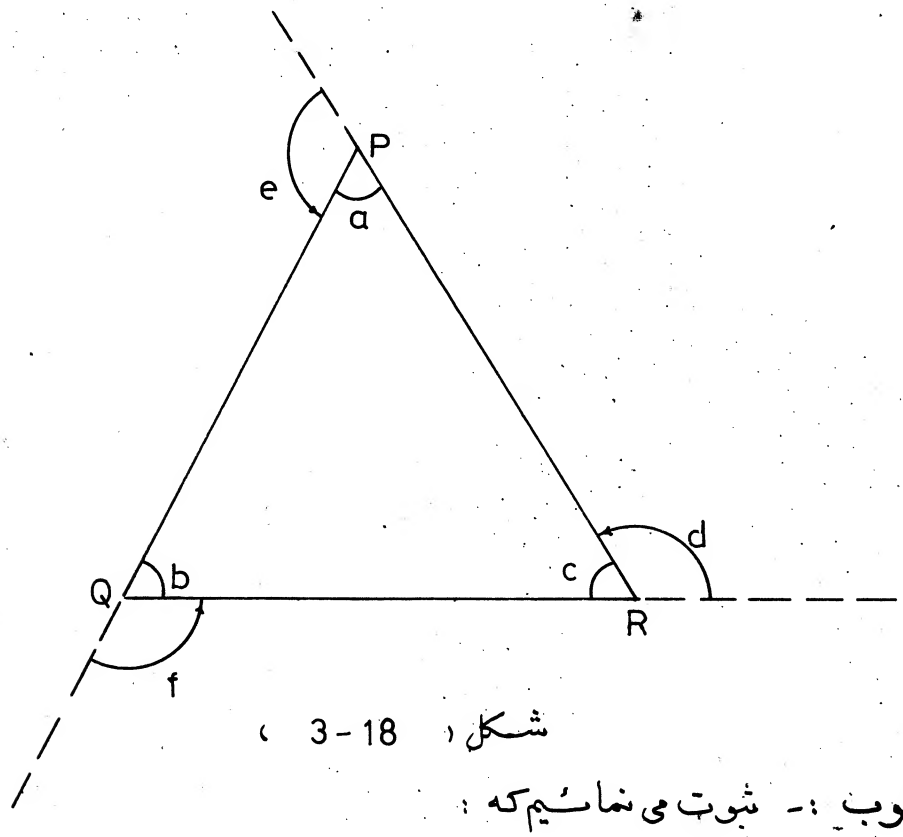
$$A\hat{C}D = A\hat{B}C + B\hat{A}C = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$$



شکل (3 - 17)

2-4-3. **قضیه دوم** :- اگر اضلاع یک مثلث را به ترتیب امتداد بدهیم مجموعه یا وسعت زوایای خارجی ایکه بدست می آید چهار قایمه و یا 360° میباشد.

مفروض :- در شکل (3-18) $\hat{d}$ ، $\hat{e}$ ، $\hat{f}$ زوایای خارجی مثلث PQR اند.



شکل (3-18)

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که :

$$\hat{d}+\hat{e}+\hat{f}=360^\circ$$

ثبوت :- چون $\hat{d}$ ، $\hat{e}$ و $\hat{f}$ زوایای خارجی مثلث PQR اند

پس نظر به قضیه (3-3-1) نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{d}=\hat{a}+\hat{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

$$\hat{e}=\hat{b}+\hat{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II}$$

$$\hat{f} = \hat{a} + \hat{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III}$$

مساوات I ، II و III را طرف بطرف جمع می نمائیم ،

$$\hat{d}+\hat{e}+\hat{f} = \hat{a}+\hat{b}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{a}+\hat{c}$$

ویا

$$\hat{d}+\hat{e}+\hat{f} = \underbrace{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}}+\underbrace{\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}}$$

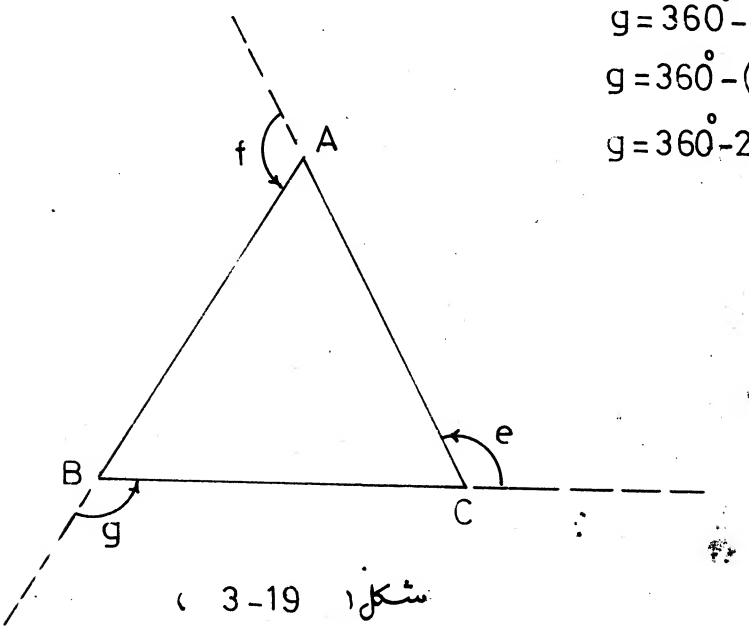
چون $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c} = 180^\circ$ میباشد بنآً نوشته کرده می توانیم که :

$$\boxed{\hat{d}+\hat{e}+\hat{f} = 180^\circ+180^\circ = 360^\circ}$$

مثال :- درشکل (3-19) ، $\hat{e} = 125^\circ$ ، $\hat{f} = 120^\circ$ است وسعت زاویه g را معلوم نمائید .

حل :- نظریه قضیه (2-4-3) ، وسعت زاویه g مساویست به

$$g = 360^\circ - (\hat{e}+\hat{f})$$
$$g = 360^\circ - (125^\circ + 120^\circ)$$
$$g = 360^\circ - 245^\circ = 115^\circ$$



شکل (3-19)

ویا هرگاه درقضیه دیده نشده ولی با آن هم ما می توانیم که درآن فرضیه و نتیجه را از هم تشخیص نمائیم . مثلاً :

1 ـ ناصف های زوایای مجاورهٔ متممه بالای یکدیگر عمود اند .

2 ـ ناصف های زوایای متقابل الراس به امتداد یک خط مستقیم قرار دارند .

3 ـ اضلاع خارجی زوایای مجاوره متممه به امتداد یک خط مستقیم قرار دارند

4 ـ اضلاع خارجی زوایای مکمله مجاوره بالای یکدیگر عمود اند

در مثال های بالا دیده میشود که هیچکدام آنها به کلمه اگر و یا هرگاه شروع نگردیده ولی با آن هم ما می توانیم که فرضیه وحکم قضیه را درآن ها تشخیص کنیم . مثلاً :

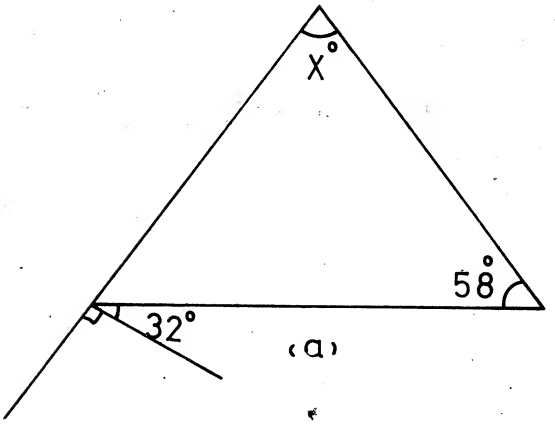
فرضیه	نتیجه
ناصف های زوایای مجاورهٔ متممه	بالای یکدیگر عمود اند
ناصف های زوایای متقابل الراس	به امتداد یک خط مستقیم واقع میباشند .
اضلاع خارجی زوایای مجاورهٔ متممه	به امتداد یک خط مستقیم قرار دارند .
اضلاع خارجی زوایای مجاوره مکمله	بالای یکدیگر عمود اند .

3 ـ 1. ثبوت قضیه :

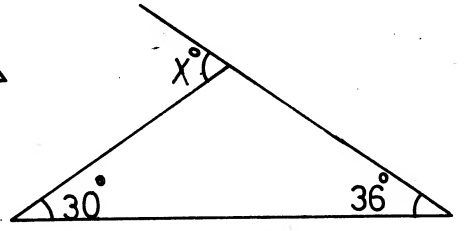
مقصد از ثبوت قضیه این است که با آوردن یک سلسله استدلال ها ودلایل منطقی وبا استفاده از اصول هندسی باید حکم قضیه از فرضیه آن بدست آید . درین قسمت می توانیم که از اصطلاحات ، تعریف ها ، اصول موضوعه ، اصول متعارفه وثبوت قضیه های گذشته کار بگیریم .

تمرین 3-3 .

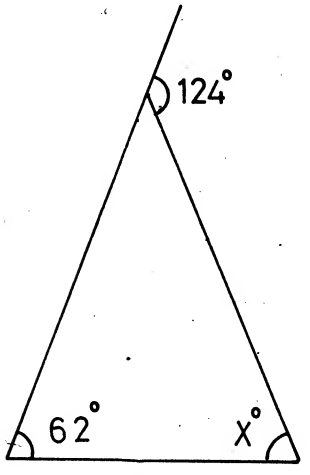
در اشکال ذیل قیمت (X) را بدست آورید .



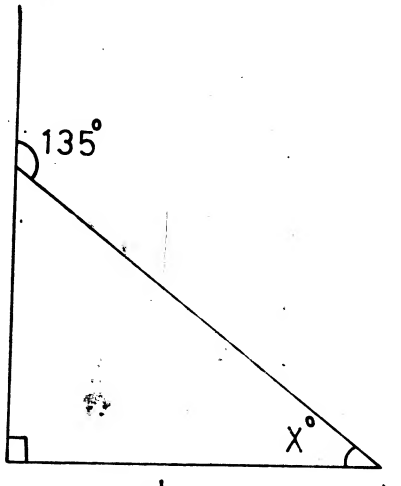
(a)



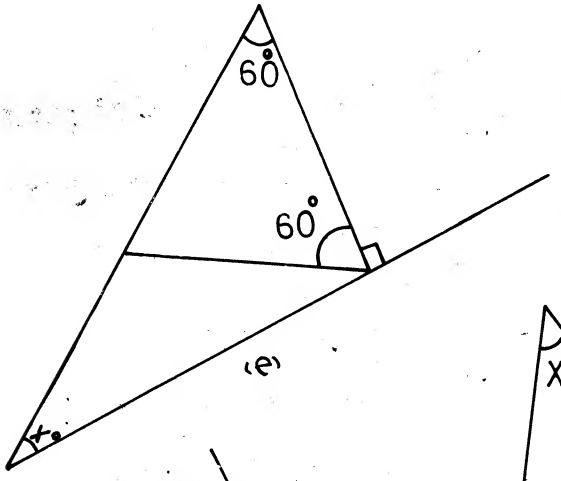
(b)



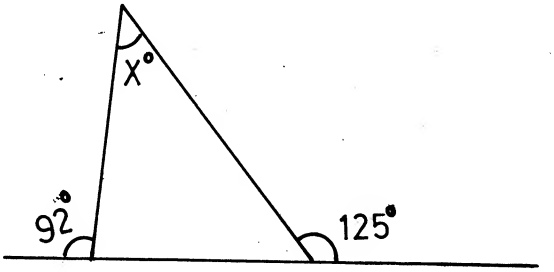
(c)



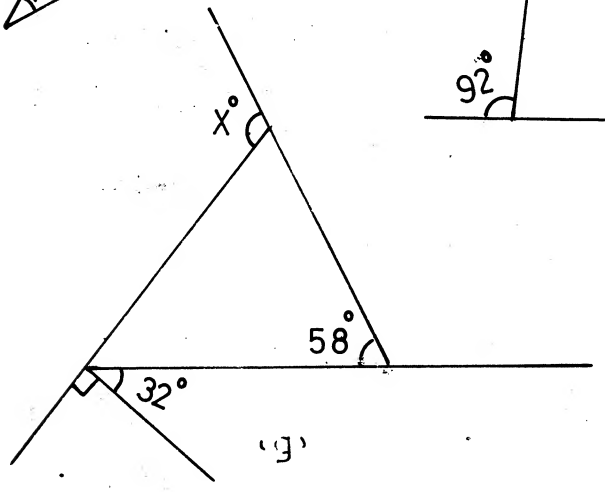
(d)



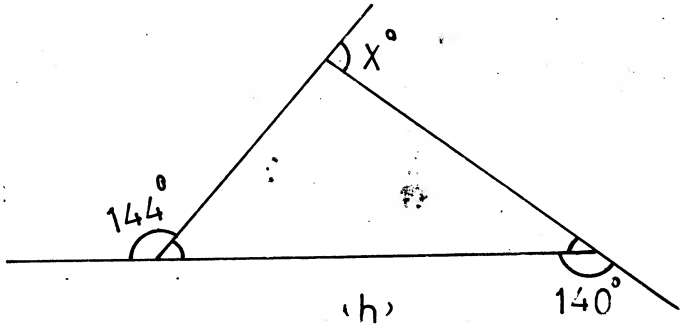
(e)



(f)



(g)



(h)

شكل (3-20)

تمرینات عمومی فصل سوم

گروپ اول :- درسوالات آتی برای هرسوال چهارجواب داده شده دور جواب صحیح را حلقه نمایید .

1- اگردریک مثلث دوضلع آن با هم مساوی باشد پس مثلث مذکور :

a- متساوی الساقین است . b- متساوی الاضلاع است .

c- مختلف الاضلاع است. d- مختلف الزاویه است .

2 - اگردریک مثلث دوزاویه آن با هم مساوی باشد پس :

a- مثلث مختلف الاضلاع است . b- مثلث متساوی الساقین است

c- مثلث متساوی الاضلاع است. d- هیچکدام .

3 - اگردریک مثلث قایم الزاویه وسعت یکی ازروایای حاده آن $60^{\circ}\,60'$ باشد وسعت زاویه حاده دیگر آن :

a- 30° b- 29°

c- $30^{\circ}\,30'$ d- $29^{\circ}30'$

4 - وسعت زاویه خارجی یک مثلث از مجموع وسعت دوزایای غیرمجاور داخلی آن :

a- بزرگتر است. b- مساویست .

c- کم است . d- هیچکدام .

5 - اضلاع AB و BC مثلث ABC ثابت است اگر زاویه B

بزرگ شود :

a- طول ضلع AC کم میشود b - طول ضلع AC ثابت می ماند.

c - طول ضلع AC زیاد می گردد d- هیچکدام

6 — اضلاع AB و AC مثلث ABC ثابت است اگر ضلع BC زیاد گردد :

a- زاویه A بزرگ میشود b - زاویه A خورد میشود.

c - زاویه A ثابت می ماند d- هیچکدام

گروپ دوّم :- از افاده های آتی کدام یک آنها درست وکدام یک آن غلط است. درمقابل صحیح (ص)، ودرمقابل غلط (غ)، نوشته کنید.

( ) 1- اگر دوضلع یک مثلث باهم مساوی باشند زوایای مقابل آن دوضلع نیزباهم مساویست.

( ) 2- درهرمثلث زاویهٔ ایکه درمقابل ضلع بزرگ قراردارد کوچکتر است از زاویه ایکه درمقابل ضلع کوچک آن واقع است.

( ) 3 - وسعت هریک اززوایای مثلث متساوی الاضلاع (61°) است.

( ) 4 - وسعت زاویه خارجی یک مثلث مساوی به مجموع وسعت زوایای غیرمجاور داخلی آن است.

5 - مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث سه قایمه است.

گروپ سوم :-

جاهای خالی را باکلمات مناسب پرنمائید :

1- مثلثی که هرسه ضلع آن باهم مساوی باشند مثلث . . . . . .

نا میده می شود .

2 – درهرمثلث مجموع طول دوضلع آن . . . . . از طول ضلع سوم آن می باشد .

3 – خطیکه از راس مثلث به ضلع مقابل آن عمود باشد بنام . . . . . یا دمیشود .

4 – اگر وسعت یکی اززوایای مثلث متساوی الاضلاع 60° باشد وسعت هریک ازدوزاویه دیگر آن هم . . . . . است .

گروپ چهارم :-

1 – اگردرمثلث های متساوی الساقین ABC و DBC قاعده BC را مشترک درنظربگیریم ثبوت نمائید که :

$$D\hat{B}A = A\hat{C}D$$

دزصورتیکه راس‌های A و D به یکطرف $\overline{BC}$ واقع باشند.

2– درمثلث متساوی الساقین ABC ، $\overline{AB} = \overline{AC}$ است اگر $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را توسط $\overline{OB}$ و $\overline{OC}$ تنصیف نمائیم ثبوت کنید که :

a – $\overline{OC} = \overline{OB}$

b – $\overline{OA}$ ناصف الزاویه $\hat{A}$ است .

3 – $\overline{OB}$ و $\overline{OC}$ به ترتیب زوایای CBA و ACB مثلث ABC را تنصیف می نمایند درصورتیکه $\overline{AC} < \overline{AB}$ باشد ثبوت نمائید که :

$\overline{OC} < \overline{OB}$ است .

4 - ثبوت نمائید که وسعت هریک از زوایای حاده یک مثلث متساوی الساقین قایم الزاویه 45° است.

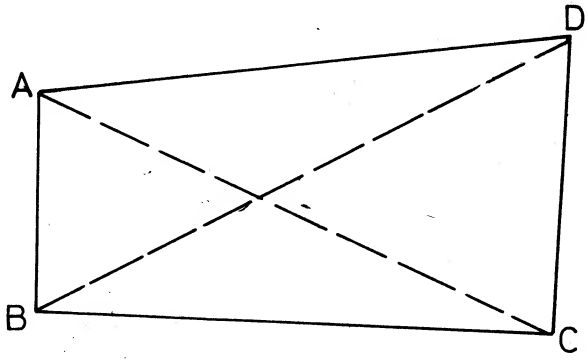
5 - اگر ضلع $\overline{BC}$ مثلث ABC تا نقطه D امتداد داده شود درصورتیکه $D\hat{C}A = 134^\circ$ و $B\hat{A}C = 42^\circ$ باشد وسعت دو زاویه دیگر مثلث را معلوم نمائید.

پایان فصل سوم

فصل چهارم

چهارضلعی ها

4-1 . **چهارضلعی** :- شکلیکه توسط چهار قطعه خط محدود شده باشد چهارضلعی است .



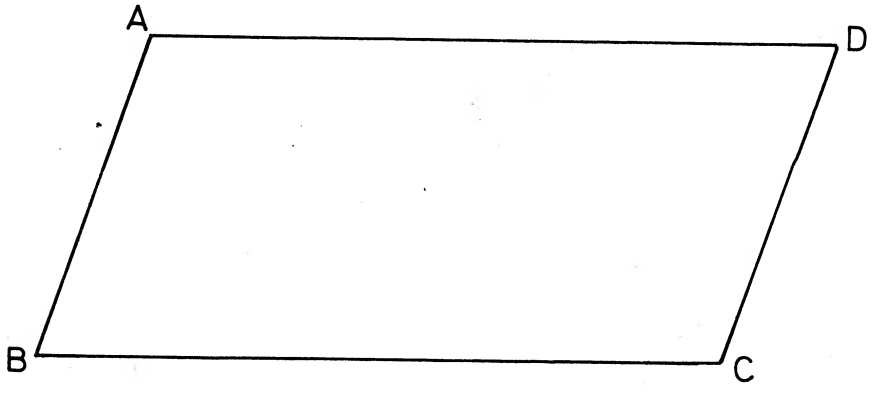
شکل (4-1)

درشکل بالا قطعه خط های AB ، BC ، CD و AD که چهارضلعی را تشکیل نموده بنام اضلاع چهارضلعی ، نقطه مشترک دوضلع راس چهارضلعی وزاویهٔ بین دوضلع ، زاویه چهارضلعی است . چهارضلعی معمولاً توسط حروف راس های آن نشان داده میشود مثلاً چهارضلعی ABCD .

به همین ترتیب خطی که دوراس مقابل چهارضلعی را با هم وصل مینماید بنام قطر چهارضلعی یاد میگردد مثلاً $\overline{AC}$ و $\overline{ED}$ قطرهای چهارضلعی ABCD میباشند .

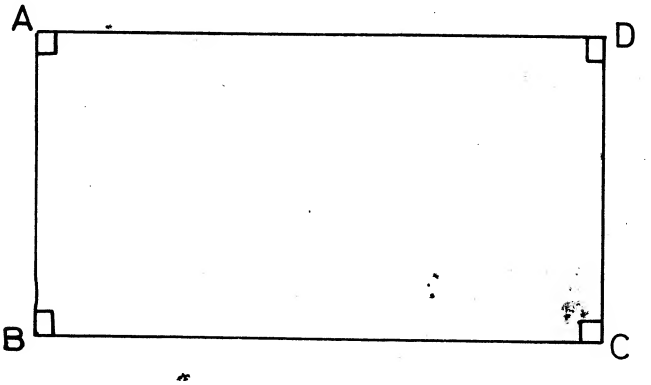
4-2. اقسام چهارضلعی :

4-2-1 . متوازی الاضلاع :- چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن باهم موازی باشد درشکل (4-2) ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ است بنابراین ABCD یک متوازی الاضلاع است .



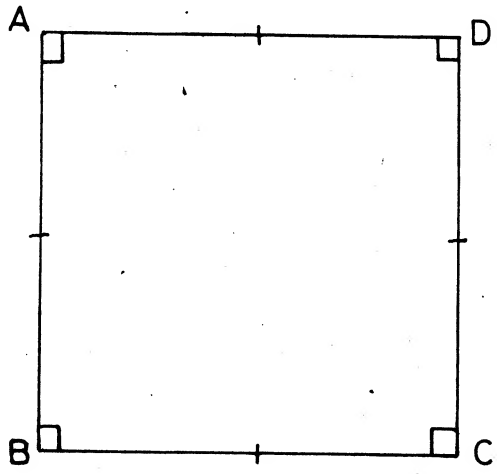
شکل (4-2)

4-2-2 . مستطیل :- متوازی الاضلاعی که زوایای آن قایمه باشد مستطیل است . درشکل (4-3) ، ABCD یک مستطیل است .



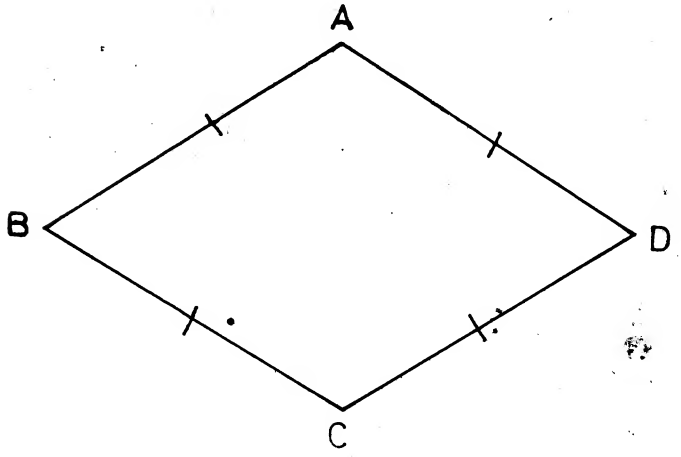
شکل (4-3)

4-2-3 . **مربع** :- مربع عبارت از آن مستطیلی است که طول دو ضلع مجاور آن با هم مساوی باشند مثلاً در شکل (4 - 4) ABCD یک مربع است.



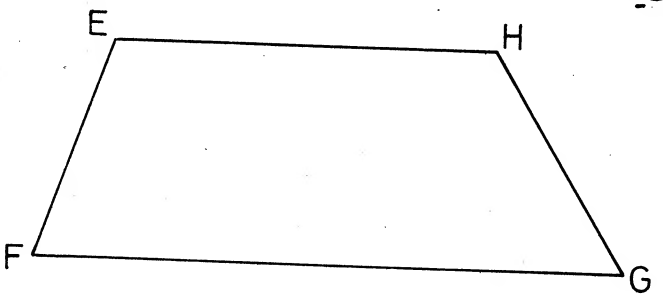
شکل (4 - 4)

4-2-4 . **معین یا لوزی** :- متوازی الاضلاعیکه طول هر جفت از اضلاع مجاور آن با هم مساوی باشد بنام لوزی یاد میگردد مثلاً شکل (4 - 5)



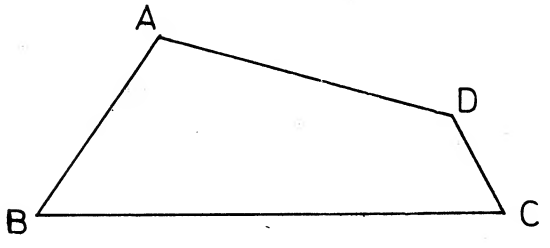
شکل (4 - 5)

4 - 2 - 5 **ذوذنقه یا منحرف** :- چهارضلعی که فقط وفقط دوضلع آن با هم موازی باشند ذوذنقه است. طور مثال درشکل (4 - 6) EFGH ذوذنقه است زیراکه $\overline{EH} // \overline{FG}$ است.



شکل (4-6)

4 - 2 - 6 **شبه منحرف** :- چهارضلعی که اضلاع آن باهم موازی نباشد شبه منحرف است.



شکل (4 - 7)

4 - 3 . زوایای داخلی چهارضلعی ها :-

زوایائیکه بین هردوضلع مجاورچهارضلعی تشکیل میگردد بنام زوایای داخلی چهارضلعی یاد میگردد. درشکل (4 - 8) $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ زوایای داخلی چهارضلعی است.

برای ثبوت مسایل هندسی قسمت های مهمی وجود داردکه هریک آن درجای خود رول مهم رابازی میکند هرگاه دریکی ازاین قسمت هااشتباهی رخ دهد ثبوت قضیه بی معنی وبی مفهوم میگردد . قسمت های مهم ثبوت قضیه قرارآتی است .

(1) **شکل** :- بکمک قضیه باید شکل طوری رسم گرددکه در آن بصورت واضح شرط ونتیجه نشان داده شود وتمام نقاط ، اضلاع ، زوایا وغیره بصورت آشکارا قابل فهم باشند .

(2) **مفروض** :- درین قسمت باید قضیه بدقت مورد بررسی قرار گرفته وبکمک شکل تمام شرایط داده شده قضیه واضح گردیده وطورساده بیان شود .

(3) **مطلوب** :-آن قسمت قضیه راکه می خواهیم ثبوت کنیم باید با استفاده ازشکل تحلیل نموده وبه زبان ساده بیان نمائیم تا تمام اهداف قضیه واضح شود.

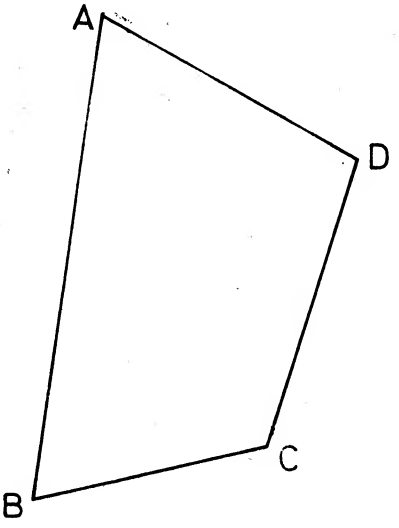
(4) **عمل یاترسیم** :- درین قسمت باید موضوعاتی تحقیق وبررسی گردیده ودرشکل رسم شود که به واسطه آن قضیه ثبوت گردیده ویا درثبوت قضیه کمک نماید .

(5) **ثبوت** :- باآوردن یک سلسله دلایل منطقی وبکارگرفتن اصول هندسی باید حکم قضیه از فرضیه آن بدست آید .

ثبوت قضیه بصورت عموم به دونوع صورت می گیرد :

1 - ثبوت مستقیم .

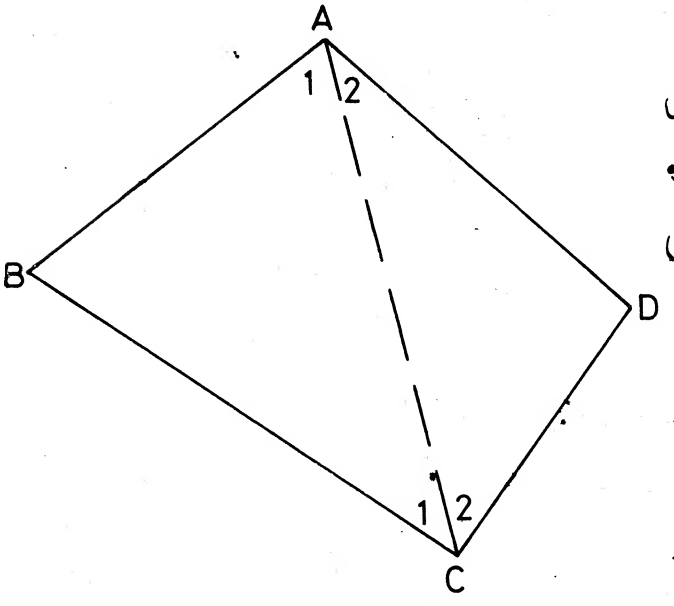
2 - ثبوت غیر مستقیم



شکل (8 - 4)

4-3-1 . **قضیه اول** :- مجموع وسعت زوایای داخلی یک چهارضلعی (4) قایمه است .

مفروض :- چهارضلعی ABCD داده شده است . شکل (9 - 4)



شکل (9 - 4)

مطلوب :- می‌خواهیم ثبوت نمائیم که : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360^\circ$

ترسیم :- قطر $\overline{AC}$ را رسم می‌کنیم .

ثبوت :- چون قطر $\overline{AC}$ چهارضلعی ABCD را به دو مثلث تقسیم می‌نماید ومجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث دوقایمه است پس مجموعه وسعت زوایای داخلی مثلث‌های (ADC) و (ABC) را چنین نوشته کرده می توانیم :

$$\hat{A}_2+\hat{D}+\hat{C}_2 = 180^\circ \ldots\ldots\ldots \text{I}$$

$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1 = 180^\circ \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

روابط I و II را طرف بطرف جمع می‌کنیم :

$$\hat{A}_2+\hat{D}+\hat{C}_2+\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1 = 180^\circ+180^\circ = 360^\circ \ldots\ldots \text{III}$$

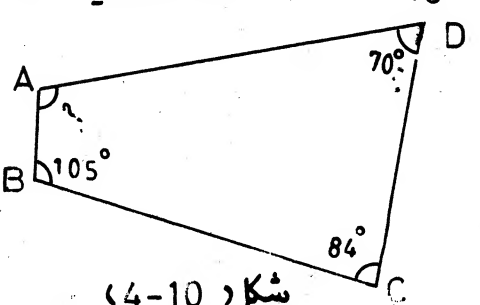
چون $\hat{C}_1+\hat{C}_2 = C$ و $\hat{A}_1+\hat{A}_2 = A$ میباشد اگر قیمت های آن در رابطه III وضع گردد چنین نتیجه بدست می‌آید که :

$$\hat{A}+\hat{D}+\hat{B}+\hat{C} = 360^\circ$$

ویا :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360^\circ$$

مثال :- در شکل (10 - 4) وسعت زاویه A را معلوم نمائید



شکل (10-4)

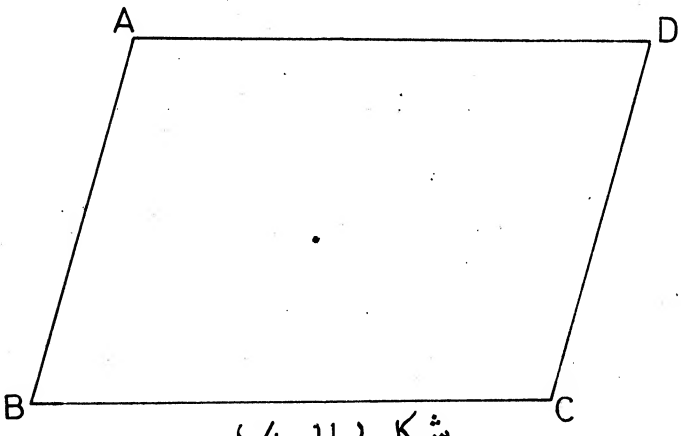
حل :- $\hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 105^\circ + 84^\circ + 70 = 259^\circ$ پس باساس

قضیه (1-3-4) داریم که :

$$\hat{A} = 360^\circ - 259^\circ = 101^\circ$$

4-3-2 . **قضیه دوم** :- زوایای مقابل هر متوازی الاضلاع باهم مساوی است .

مفروض :- متوازی الاضلاع ABCD ، داده شده است .



شکل (4-11)

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که :

$$\hat{A} = \hat{C}$$
$$\hat{B} = \hat{D}$$

ثبوت :- چون

$\overline{AD} // \overline{BC}$

پس باساس قضیه (3-5-2) نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \ldots\ldots\ldots I$$

به همین قسم $\overline{AB} // \overline{CD}$ است پس داریم که :

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \ldots\ldots II$$

از مقایسه رابطه I و II نوشته کرده می توانیم که :

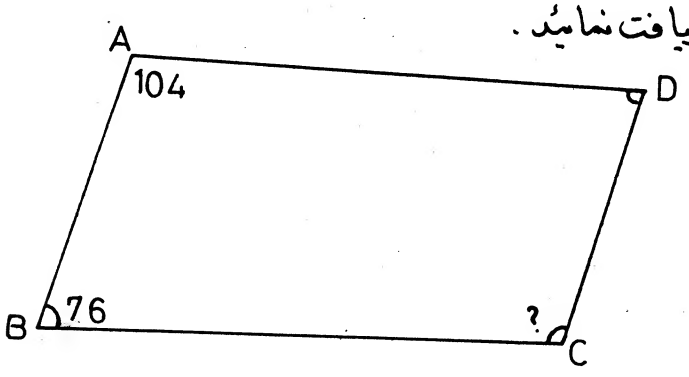
$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{B} \ldots\ldots\ldots III$$

اگر $\hat{B}$ را از هردو طرف مساوات III تفریق کنیم چنین نتیجه بدست می آید که :

$$\hat{A} = \hat{C}$$

نوت :- شاگردان به قسم متباین ثبوت نمایند که $\hat{B}=\hat{D}$

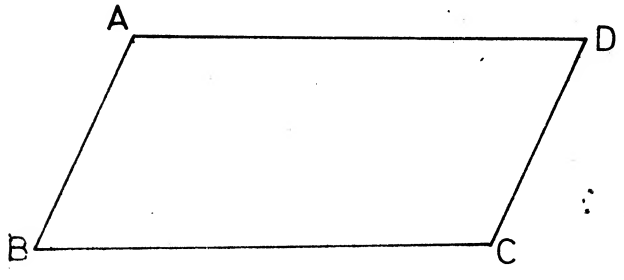
مثال :- در شکل ذیل، ABCD ، یک متوازی الاضلاع است وسعت $\hat{C}$ و $\hat{D}$ را دریافت نمایید.



حل :- چون (ABCD) ، شکل (12 - 4) ،
یک متوازی الاضلاع است پس زوایای مقابل آن مطابق به قضیه (2-3-4) مساویست. بنا :

$\hat{C}=104^\circ$ $\hat{D}=76^\circ$

3-3-4 . **قضیه سوم** :- اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی دو به دو باهم مساوی باشند چهارضلعی مذکور متساوی الاضلاع است .



شکل (13 - 4)

مفروض :- درچهارضلعی ABCD ، $\hat{A}=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{D}$ است.

مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که : ABCD یک متوازی الاضلاع است .

ثبوت :- $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$ I

قرار مفروض II ..... $\left.\begin{matrix}\hat{A}=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{D}\end{matrix}\right\}$

قیمت های مساوی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در رابطه I وضع می نمائیم :

$\hat{C}+\hat{D}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$

ویا

$2\hat{C}+2\hat{D}=360^\circ$

$\hat{C}+\hat{D}=180^\circ$ ..... III یا

از رابطه III نوشته کرده می توانیم که :

$\overline{AD}//\overline{BC}$ IV

اگر قیمت های مساوی A و D را از رابطه II در رابطه I وضع کنیم بدست می آریم که :

$\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ V

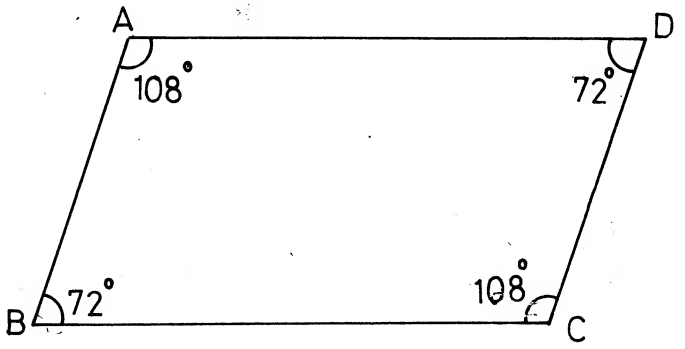
از رابطه V نوشته کرده می توانیم که :

$\overline{AB}//\overline{CD}$ VI

درنتیجه از مقایسه مساوات IV و VI نوشته کرده می توانیم که :

ABCD یک متوازی الاضلاع است .

مثال :- درشکل (14 - 4) ، $\hat{A}=\hat{C}=108^\circ$ و $\hat{B}=\hat{D}=72^\circ$ است نشان دهید که ABCD یک متوازی الاضلاع است .

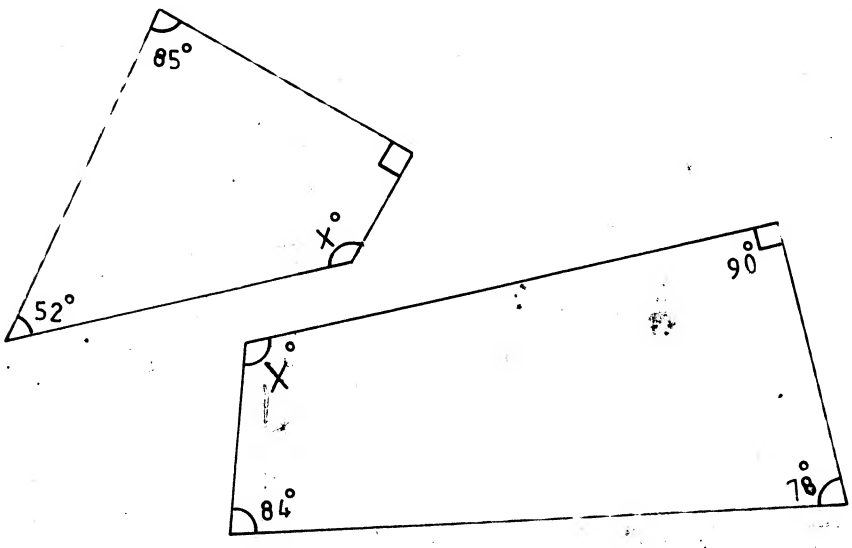


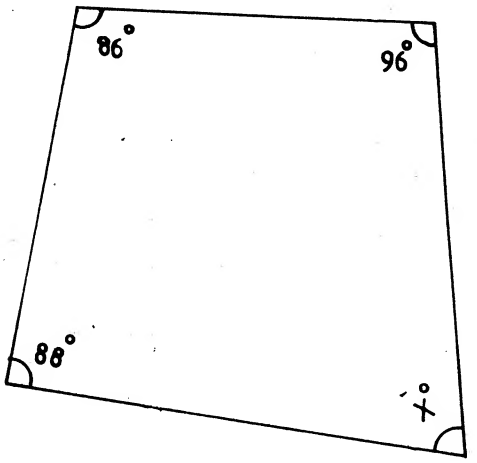
شکل (14 - 4)

حل :- چون زوایای مقابل چهارضلعی ABCD با هم مساوی است پس به اساس قضیه (3-3-4) ، گفته می توانیم که ABCD ، یک متوازی الاضلاع است .

تمرین (1 - 4) .

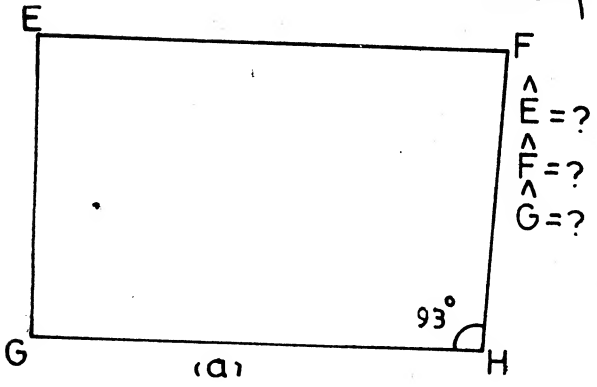
1 - در اشکال ذیل قیمت (X) را پیدا نمائید.

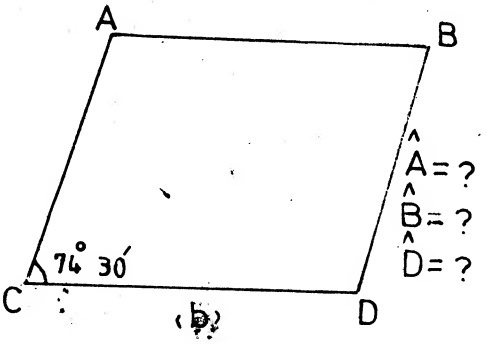


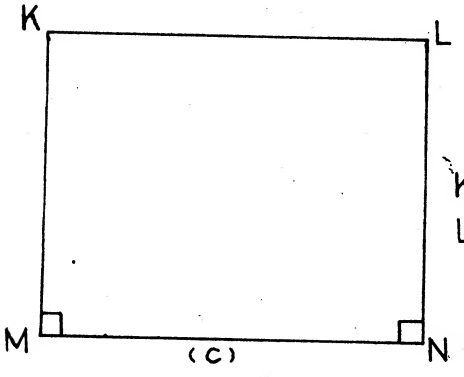


شکل (15-4)

2 - وسعت زوایای نا معلوم را پیدا نمائید . درشکل (16 - 4)
اضلاع مقابل هرچهار ضلعی باهم موازی است .

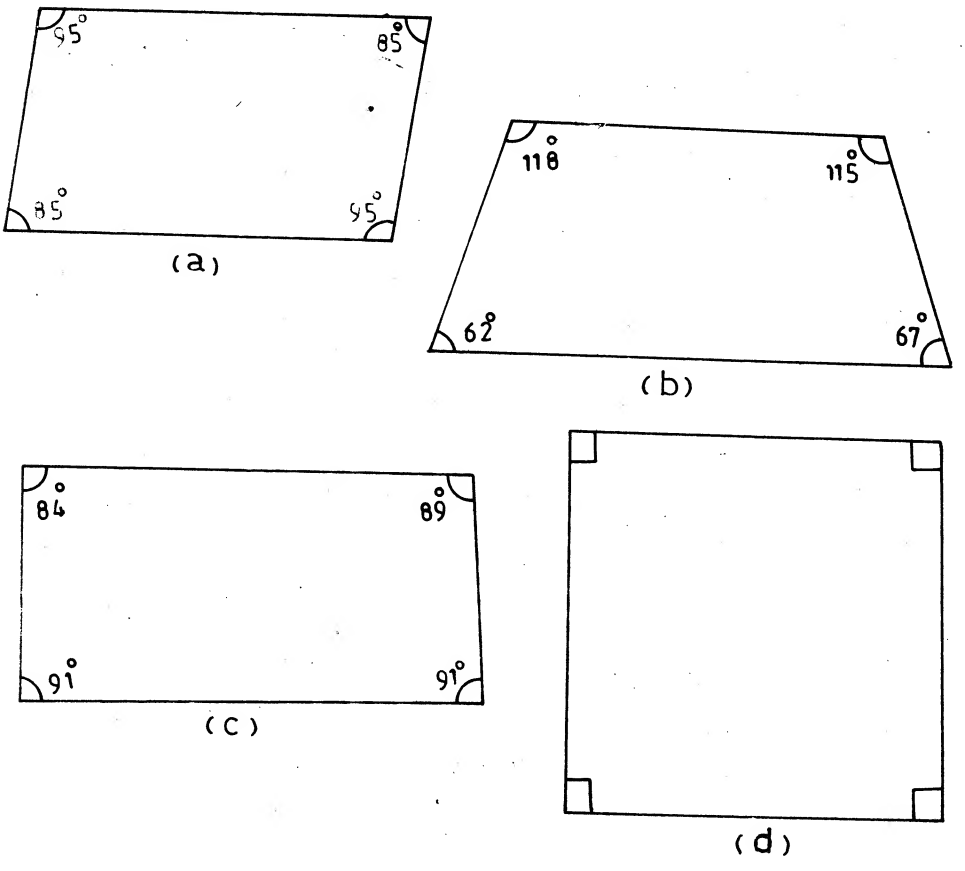






شکل (16-4)

3 ـ درچهارضلعی‌های ذیل متوازی الاضلاع رانشان دهید .



شکل (4 - 17)

4 ـ درچهارضلعی ABCD وسعت زوایای $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ به ترتیب 2a ، 3a و 4a میباشد اگر وسعت زاویه $\hat{A}$ مساوی به (a) باشد وسعت هریک از زوایای داخلی آنرا محاسبه نمائید.

4-4 . زوایای خارجی چهارضلعی‌ها :ـ

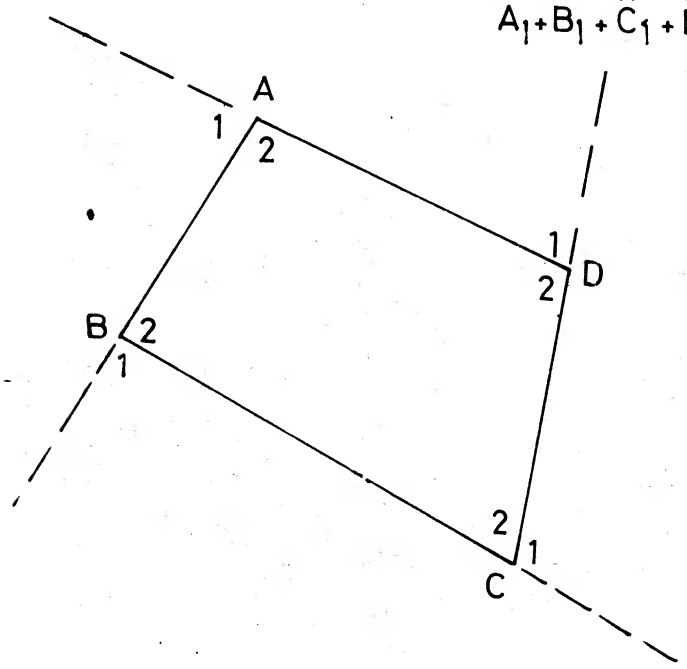
4-4-1 ـ قضیه :ـ اگر اضلاع یک چهارضلعی به ترتیب امتداد داده شود

زوایای خارجی ایکه بدست می آید مجموعهٔ وسعت شان (4 ، قایمه است

مفروض :- چهارضلعی ABCD ، داده شده است شکل (18 - 4) .

مطلوب :- می خواهیم ثبوت نمائیم که :

$$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1+\hat{D}_1 = 360^\circ$$



شکل (18 - 4)

ثبوت :- ازشکل (18 - 4) داریم که :

زوایای مجاوره $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \ldots$ I

به یکطرف خط مستقیم

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ II

$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ III

$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$ IV

روابط بالا را طرف بطرف جمع می نمائیم .

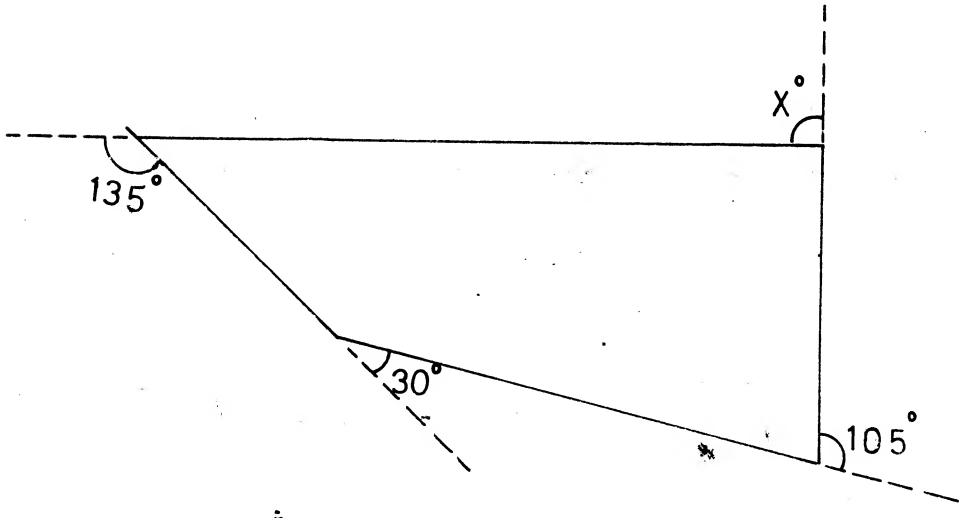
$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \quad \text{V}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 360^\circ + 360^\circ \quad \text{VI}$$

چون $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 360^\circ$ است قیمت آنرا در رابطه VI وضع نموده وبعداً ازهردوطرف آن 360° را تفریق می نمائیم چنین نتیجه بدست میآید که :

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 360^\circ$$

مثال :- درشکل (19 - 4) قیمت X را معلوم نمائید.



شکل (19 - 4)

حل :-

$$\hat{X} = 360^\circ - (135^\circ + 30^\circ + 105^\circ) = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$$

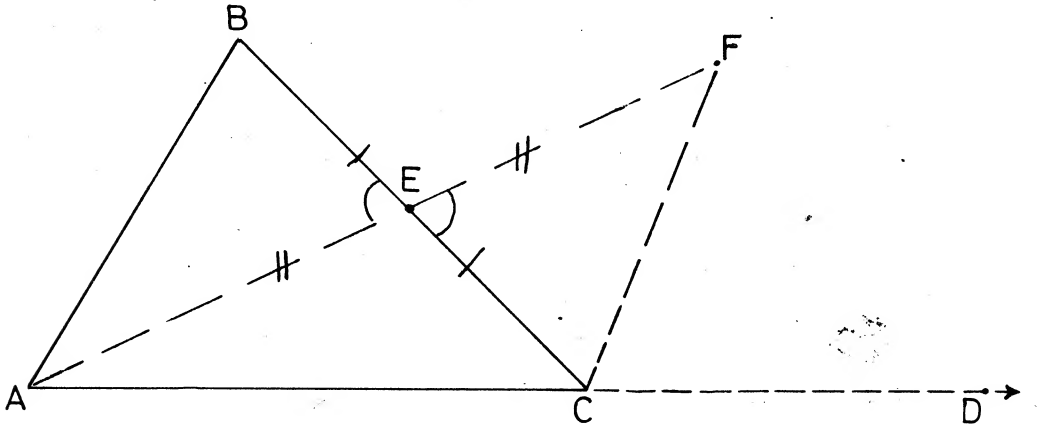
$$\hat{X} = 90^\circ$$

1-3-1. ثبوت مستقیم :-

در ثبوت مستقیم حکم قضیه از فرضیه آن توسط یک عده دلایل منطقی بدست می آید طور مثال :

1a-3-1. قضیه اول :- هرگاه یکی از اضلاع مثلث را امتداد دهیم زاویهٔ خارجی که در اثر امتداد آن بوجود میآید بزرگتر ازهر یکی از زوایای غیرمجاور داخلی آن میباشد .

(1) **شکل :-** در شکل (1-1) مثلث ABC داده شده است . ضلع AC مثلث را امتداد داده ونقطه (D) را بالای آن انتخاب میکنیم $\hat{BCD}$ زاویه خارجی مطلوب است .



ش (1-1)

2-مفروض :- درمثلث ABC ضلع AC تا نقطه D امتداد داده شده است .

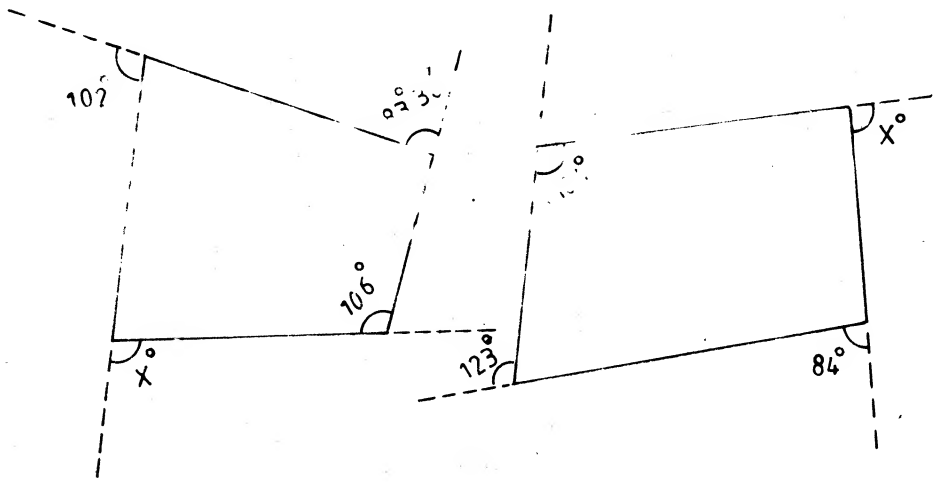
3-مطلوب :- ثبوت میکنیم که وسعت زاویهٔ خارجی BCD بزرگتر است ازوسعت هریک از زوایای BAC و CBA

یعنی $\hat{BAC} < \hat{BCD}$

$\hat{CBA} < \hat{BCD}$

تمرین 4 - 2 :

1 - قیمت x را تعیین کنید .



شکل (4 - 20)

4 - 5 . خواص اضلاع چهارضلعی ها :-

4 - 5 - 1 . قضیه اول :- اضلاع مقابل هر متوازی الاضلاع باهم مساویست.

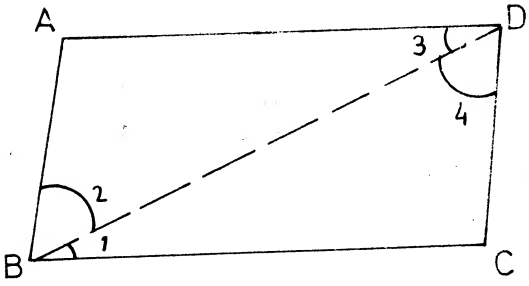
مفروض :- متوازی الاضلاع ABCD داده شده است شکل (4 - 21)

مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که :

$\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{BC}$

است.



شکل (4 - 21)

ترسیم : درشکل (4 - 21) B را به D وصل می نمائیم .

ثبوت :- از مقایسه مثلث های ABD و CDB نوشته کرده میتوانیم که :

$\hat{B}_2 = \hat{D}_4$ ..... قوارمتبادله

$\hat{A}_1 = \hat{C}_3$ ..... قوارمتبادله

$\overline{BD} = \overline{BD}$ ..... قوارضلع مشترک

از مقایسه مساوات بالا نتیجه ذیل را نوشته میکنیم که :

$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{CDB}$

وقتیکه $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{CDB}$ انطباق پذیر شدند پس $\overline{AB} = \overline{CD}$ و $\overline{AD} = \overline{BC}$ است .

مثال :- درشکل (4-21) $\overline{AB} = 3cm$ و $\overline{AD} = 5cm$ است .

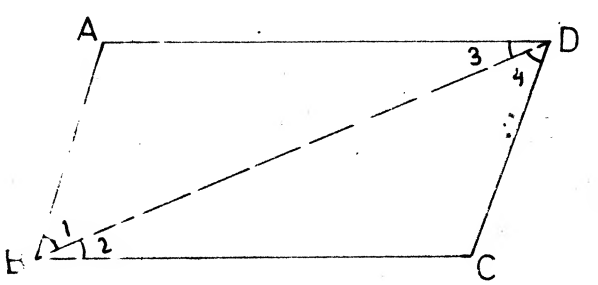
طول اضلاع $\overline{BC}$ و $\overline{DC}$ را معلوم نمائید .

حل :- باساس تطبیق قضیه (4-5-1) $\overline{BC} = 5cm$ و $\overline{DC} = 3cm$ می شود

4-5-2 **قضیه دوم :-** اگر اضلاع مقابل یک چهارضلعی دو به دو باهم مساوی باشند پس چهارضلعی مذکور متوازی الاضلاع است .

مفروض :- درچهارضلعی ABCD ، $\overline{AB} = \overline{DC}$ و $\overline{AD} = \overline{BC}$ است .

مطلوب :- ثبوت می نمائیم که چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است .



شکل (4-22)

ترسیم :- درشکل (22 - 4) ، B را به D وصل می‌نمائیم .

ثبوت :- ازمقایسه مثلث‌های ABD و BCD داریم .

قرارفرضیه $\overline{AB} = \overline{DC}$

قرارضلع مشترک $\overline{BD} = \overline{BD}$

قرارفرضیه $\overline{AD} = \overline{BC}$

ازمساوات بالا بدست میآید که :

$$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD}$$

بناً زاویه $\hat{3} = \hat{2}$ میشود وچون زاویه‌های $\hat{2}$ و $\hat{3}$ زوایای متبادله اند بناً نوشته کرده می توانیم که :

$$\overline{AD} // \overline{BC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{I}$$

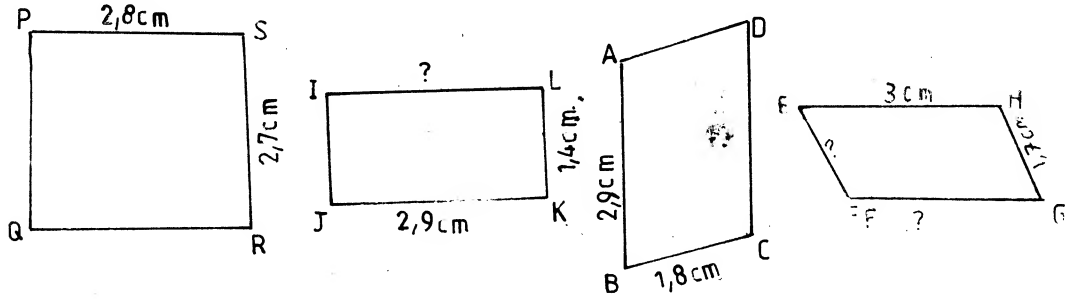
به همین ترتیب $\hat{4} = \hat{1}$ است پس نوشته می‌کنیم که :

$$\overline{AB} // \overline{BC} \quad \cdots\cdots\cdots \text{II}$$

ازروابط I و II گفته می‌توانیم که ABCD متوازی الاضلاع است.

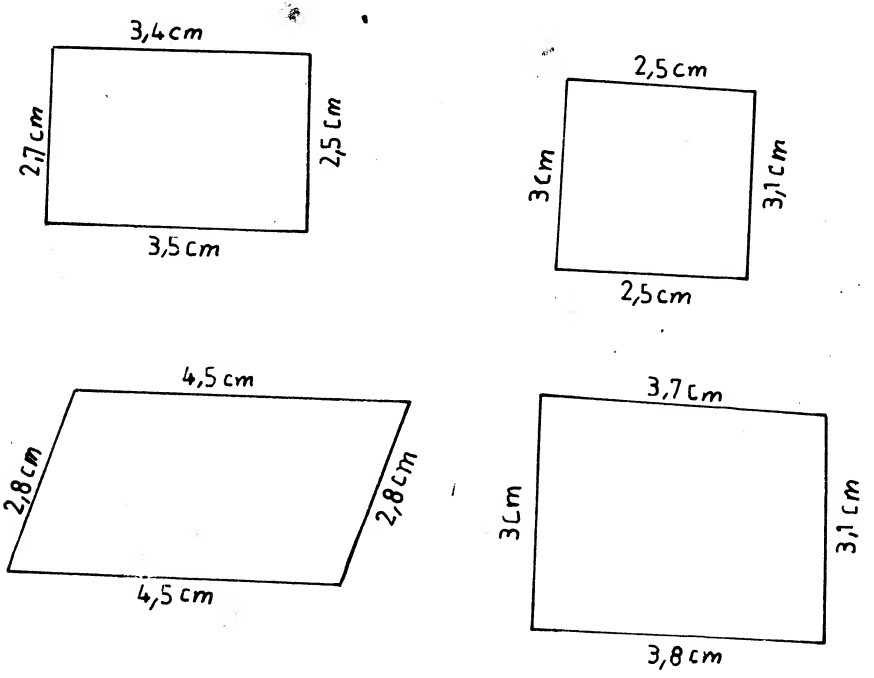
تمرین 4 - 3 :-

درشکل (23 - 4) ، اضلاع نامعلوم هرمتوازی الاضلاع رادریابید.



شکل (23 - 4)

2 ـ کدام یک از اشکال ذیل متوازی الاضلاع است .



شکل (4 - 24)

3 ـ اگر دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع با هم مساوی باشد نشان دهید که هر چهار ضلع آن متوازی الاضلاع با هم مساویست .

4-6 . خواص قطرهای چهار ضلعی ها .

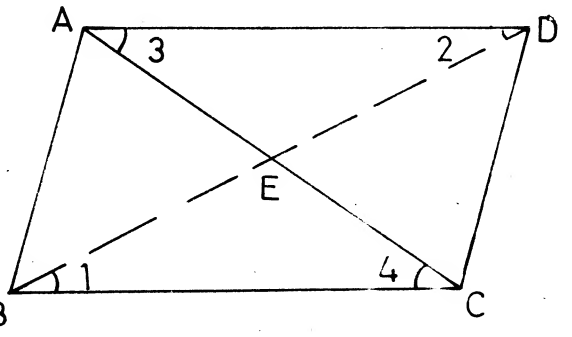
4-6-1 . **قضیه اول** : قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف مینمایند .

مفروض :ـ $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطرهای متوازی الاضلاع ABCD اند که یکدیگر را در نقطه E قطع نموده اند . شکل (4 - 25) .

مطلوب :ـ می خواهیم ثبوت نمائیم که :

$\overline{AE} = \overline{EC}$

و $\overline{BE} = \overline{ED}$ میباشند.



شکل (25 - 4)

ثبوت :ـ مثلث های AED و CEB را با هم مقایسه می‌کنیم

$\hat{2} = \hat{1}$ ..... قرار متبادله

$\hat{3} = \hat{4}$ ..... قرار متبادله

$\overline{AD} = \overline{BC}$ ..... ضلع مقابل متوازی الاضلاع

از مساوات بالا نوشته کرده می توانیم که :

$\overset{\Delta}{AED} \cong \overset{\Delta}{CEB}$

درنتیجه بدست می آید که : $\overline{BE} = \overline{ED}$ و $\overline{AE} = \overline{EC}$.

مثال :ـ درشکل 25 - 4 ، $\overline{BD} = 6{,}4cm$ و $\overline{AC} = 4{,}8cm$ است $\overline{ED}$ و $\overline{EC}$ را تعین نمایید .

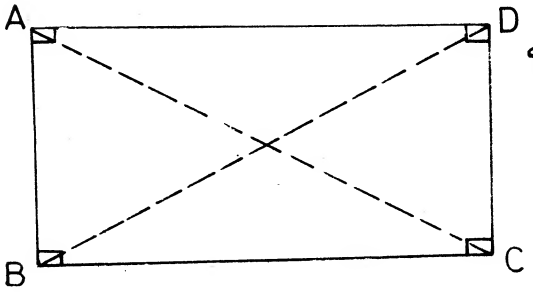
حل :ـ باساس قضیه (1 - 6 - 4) قطرهای $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ یکدیگرخود را تنصیف می نمایند پس $\overline{ED} = 3{,}2cm$ و $\overline{EC} = 2{,}4cm$ می‌شود.

4-6-2. قضیه دوم :ـ قطرهای یک مستطیل باهم مساویست

مفروض :ـ درشکل (4 - 26) $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطرهای مستطیل ABCD است .

مطلوب :ـ ثبوت می نمائیم که :

$$\overline{AC}=\overline{BD}$$



شکل (4 - 26)

ثبوت :ـ ازمقایسه مثلث های DBA و CAB داریم که

قرارفرضیه ..... $\overline{AD}=\overline{BC}$

ضلع مشترک ..... $\overline{AB}=\overline{AB}$

قرار قایمه ..... $\hat{A}=\hat{B}$

چون $\overset{\Delta}{DBA}$ و $\overset{\Delta}{CAB}$ انطباق پذیراند درنتیجه بدست می آید که :

$$\overline{AC}=\overline{BD}$$

مثال :ـ $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطرهای مستطیل (ABCD) است اگر $\overline{EC}=2,5cm$ باشد طول $\overline{BD}$ را معلوم نمائید شکل (4 - 27)

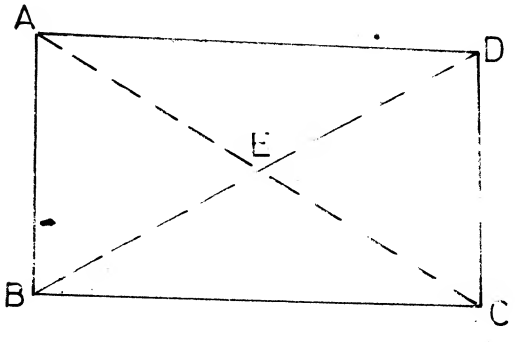
حل :ـ چون قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف می نمایند پس :

$$\overline{EC}=\overline{AE}=2,5cm$$

ازینجا $\overline{AC}=5cm$ می شود.

باساس قضیه (4-6-2)

$\overline{BD}=\overline{AC}=5cm$ است .



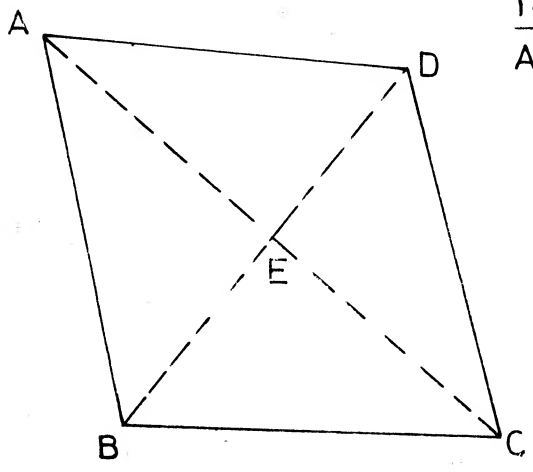
شکل (4 - 27)

3-6-4. **قضیه سوم** :- قطرهای معین یالوزی بالای یکدیگر عمود اند .

مفروض :- $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطرهای لوزی ABCD است شکل (28 - 4)

مطلوب :- می خواهیم ثبوت نمائیم که :

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$



شکل (28 - 4)

ثبوت :- ازتعریف لوزی نوشته کرده می توانیم که :

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

باساس قضیه (1 - 6 - 4) ، قطر های $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یکدیگرخود را تنصیف می نمایند پس :

$\overline{EC} = \overline{EA}$ ، $\overline{BE} = \overline{ED}$ است

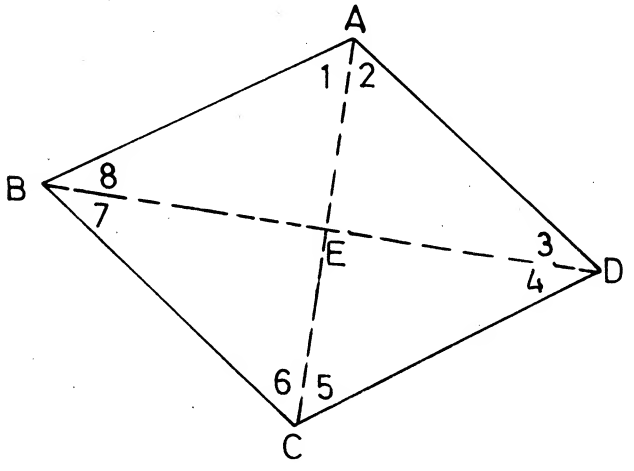
به همین ترتیب درصنف هفتم خوانده بودیم که اگرراس یک مثلث متساوی الساقین رابه نقطه تنصیف قاعده آن وصل نمائیم خط مذکور ارتفاع ومیانه مثلث است .

چون درشکل (28 - 4) ، مثلث های ADC و ABC متساوی الساقین اند پس ED و EB ارتفاعات آن هااست .

بناءً درنتیجه بدست می آید که :

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

مثال : درشکل (29 – 4) ، $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطرهای لوزی ABCD است اگر $\hat{1}=\hat{2}=\hat{5}=\hat{6}=51^\circ$ باشد وسعت زوایای $\hat{3}$ ، $\hat{4}$ ، $\hat{7}$ ، $\hat{8}$ را معلوم نمائید .



شکل (29 - 4)

حل :- چون $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ است پس $A\hat{E}D$ ، $A\hat{E}B$ ، $B\hat{C}E$ و $D\hat{C}E$ مثلث های قایم الزاویه اند . بناءً نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{3}=\hat{4}=\hat{7}=\hat{8}=39^\circ$$

تمرینات عمومی فصل چهارم

گروپ اول :- درسوالات ذیل مقابل هرسوال چهارجواب داده شده است دوجواب صحیح را حلقه نمایید .

1 - چهارضلعی که اضلاع مقابل آن با هم موازی باشند.

a - متوازی الاضلاع است . b - ذوذنقه است .

c - شبه منحرف است . d - هیچکدام .

2 - چهارضلعی که فقط وفقط دوضلع آن موازی باشد .

a - مستطیل است . b - مربع است .

c - معین است . d - ذوذنقه است .

3 - اگرمجموعهٔ وسعت سه زاویهٔ یک چهارضلعی $310^\circ\ 30'$ باشد وسعت زاویه چهارم آن مساویست به :

a - 50° b - $50^\circ\ 30'$

c - $49^\circ\ 30'$ d - $49^\circ\ 29'$

4 - وسعت یکی اززوایای متوازی الاضلاع 80° است وسعت زاویه مقابل آن مساویست :

a - 80° b - 90°

c - 80° d - هیچکدام

5 ـ اگر اضلاع مقابل یک چهارضلعی دو بدو با هم مساوی باشند پس چهارضلعی مذکور :

a ـ متوازی الاضلاع است . b ـ ذوذنقه است .

c ـ شبه منحرف است . d ـ هیچکدام .

6 ـ اگر یک قطر یک مستطیل 18 cm باشد قطر دیگر آن مساویست به :

a ـ 0,18 cm b ـ 1,8 cm

c ـ 180mm d ـ هیچکدام .

گروپ دوم :ـ

جاهای خالی را با کلمات مناسب پُر نمائید .

1 ـ شکلی که بواسطه چهار قطعه خط محدود شده باشد ..... است .

2 ـ مستطیلی که طول اضلاع مجاور آن با هم مساوی باشد ..... است .

3 ـ اگر قطرهای یک چهارضلعی بالای یکدیگر عمود باشند چهارضلعی مذکور ..... یا ..... است .

4 ـ قاعده های ذوذنقه همراه یکدیگر ..... است .

5 ـ خط مستقیمی که راس های چهارضلعی را با هم وصل می نماید ..... یا دمیشود .

گروپ سوم :

از افاده های آتی کدام یک درست وکدام یک آن غلط است درمقابل جمله صحیح ، ص ، ودرمقابل جمله غلط ، غ ، نوشته کنید .

1 ـ مستطیل متوازی الاضلاعی است که یک زاویهٔ آن قایمه باشد .

4 - **ترسیم :** راس A را به نقطه وسطی BC که به حرف E نشان داده شده وصل نموده و قطعه خط $\overline{AE}$ را به اندازه طول خودش تا نقطه F امتداد داده بعداً نقطه F را به نقطه C وصل میکنیم .

5 - **ثبوت :** در مثلث های ABE و FEC روابط ذیل موجود است :

$\overline{AE} = \overline{EF}$ ..... قرار ترسیم

$\overline{BE} = \overline{EC}$ ..... (E نقطه وسطی BC است)

$A\hat{E}B = F\hat{E}C$ ..... قرار متقابل بالراس

چون دو ضلع و یک زاویه مابین دو ضلع مثلث های ABE و FEC باهم مساوی اند ، بنابرآن مثلث های مذکور انطباق پذیر اند لهذا هر زاویه مثلث با زاویه مربوطه اش در مثلث دیگر انطباق پذیر شده بالنتیجه .

$\hat{B} = E\hat{C}F$

از طرف دیگر چون $B\hat{C}D = E\hat{C}F + F\hat{C}D$ است

پس $B\hat{C}D = \hat{B} + F\hat{C}D$

از رابطهٔ بالا چنین نتیجه می گیریم که زاویهٔ BCD ، بزرگتر از زاویهٔ $\hat{B}$ ، است از طرف دیگر چون زاویهٔ BCD زاویهٔ خارجی مثلث $A\hat{B}C$ و زاویهٔ $\hat{B}$ زاویهٔ غیر مجاور داخلی مثلث مذکور است بنآً نتیجه و یا مطلوب - بدست آمد .

ترتیب

به همین شاگردان می توانند که ضلع BC ، مثلث مذکور را امتداد داده ، ثابت نمایند که زاویهٔ خارجی ایکه بدست میآید بزرگتر از زاویه غیر مجاور داخلی $\hat{A}$ مثلث مذکور است .

2 ـ اضلاع مقابل هرمتوازی الاضلاع موازی ومساویست . ( ) .

3 ـ اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی دوبدو با هم مساوی باشند آن چهار ـ ضلعی ذودنقه است . ( ) .

4 ـ زوایای مقابل یک لوزی یا معین با هم مساویست . ( ) .

5 ـ هرچهارضلعی شبه منحرف شده می تواند . ( ) .

گروپ چهارم :ـ حرف (ص) را درجای مناسب نوشته کنید .

(مثال را ببینید .)

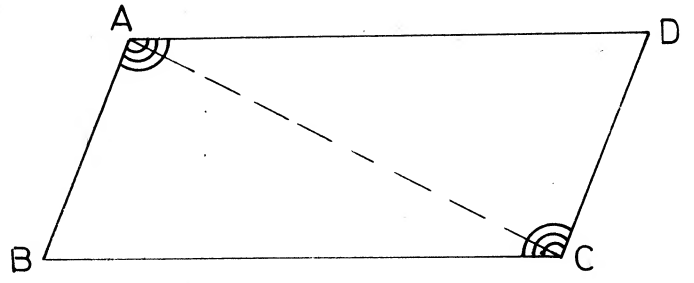
	اضلاع مقابل موازی ومساویست	تمام اضلاع آن مساویست	تمام زوایای آن مساویست	زوایای مقابل مساویست	قطرها		قطرها یکدیگر را تنصیف می نمایند
متوازی الاضلاع	ص						
مستطیل							
مربع							
معین (لوزی)							
ذودنقه (منحرف)							
شبه منحرف							

گروپ پنجم :ـ

1 ـ وسعت یک زاویه یک متوازی الاضلاع (55°) است وسعت سه زاویه دیگر آنرا معلوم نمائید .

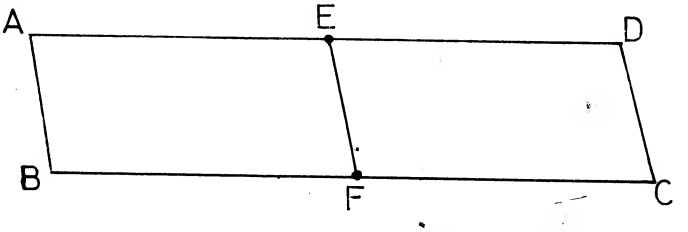
2 - اگر یک زاویه یک متوازی الاضلاع قایمه باشد ثبوت نمائیدکه زوایای دیگرآن نیزقایمه است .

3 - درچهارضلعی ABCD ، $\hat{BAD}=\hat{DCB}$ و $\hat{DCA}=\hat{BAC}$ می باشد . ثبوت نمائیدکه ABCD یک متوازی الاضلاع است شکل (30 - 4)



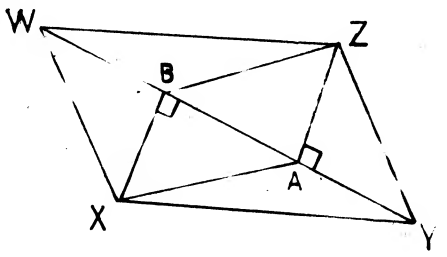
شکل (30 - 4)

4 - درشکل (31 - 4) ABCD یک متوازی الاضلاع و E و F به ترتیب نقاط وسطی $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ اند ثبوت نمائیدکه ABFE و CDEF هردومتوازی الاضلاع اند .



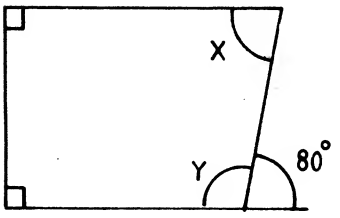
شکل (31 - 4)

5 - درمتوازی الاضلاع WXYZ ، $\overline{XB}\perp WY$ و $\overline{ZA}\perp WY$ است ثبوت نمائیدکه XAZB نیزمتوازی الاضلاع است. شکل (32 - 4)

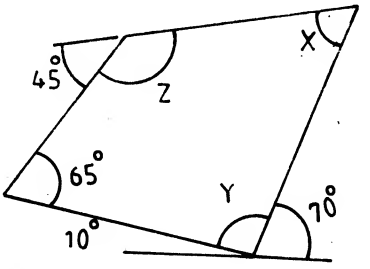


شکل (4 - 32)

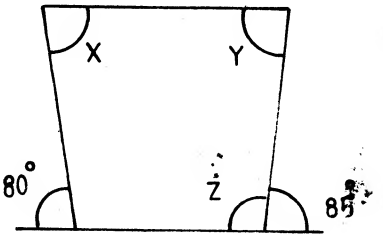
6 - در اشکال آتی وسعت X ، Y و Z را بدرجه معلوم نمائید.



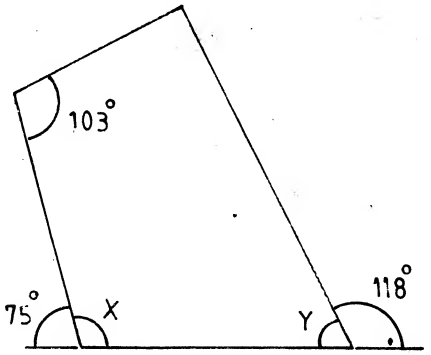
(a)



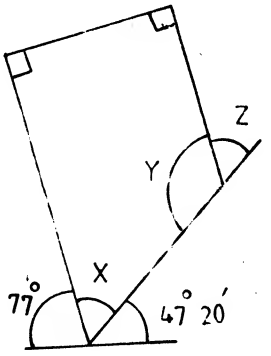
(b)



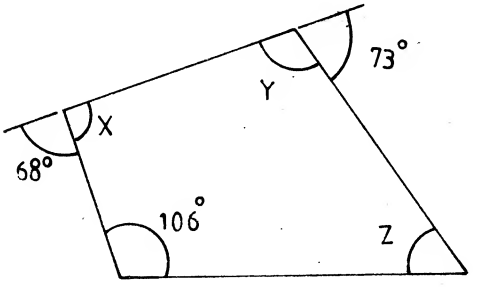
(c)



(d)



(e)



(f)

مشكل (33 - 4)

فصل پنجم

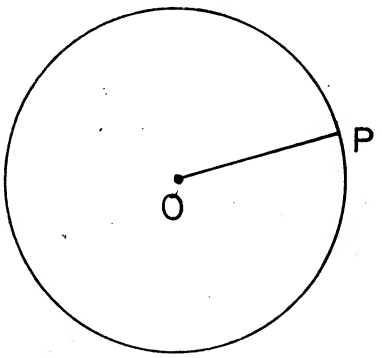
دایره

5-1 دایره :-

ست نقاطیکه روی یک مستوی از یک نقطه مفروض O به فواصل مساوی داشته باشند دایره نامیده میشود. ونقطهٔ مفروض O مرکز دایره است.

اگر P یک نقطه دایره باشد $\overrightarrow{OP}$ شعاع آن دایره است شکل (1-5)

همچنان ست نقاطیکه فواصل آنها از مرکز به اندازهٔ شعاع دایره باشند محیط دایره گفته می شود . *



شکل (1-5)

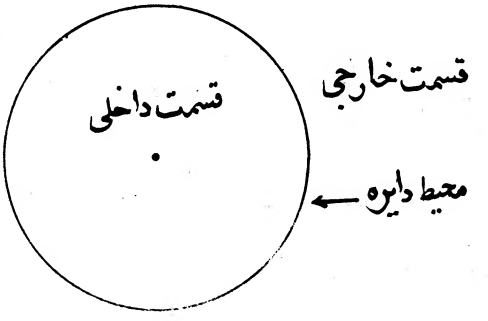
---

* یا بعبارهٔ دیگر ست نقاطیکه از مرکز دایره فاصله های مساوی داشته باشد محیط دایره نامیده می شود .

یادداشت : معلم صاحب طی چند شاگرد مستوی را طور عملی برای شاگردان نشان بدهد .

قسمت های داخلی وخارجی دایره :-

5 - 2 :- مرکزدایره وست نقاطیکه فاصلهٔ آنها ازمرکز، کوچکتر ویا مساوی به شعاع دایره باشد بنام قسمت های داخلی دایره وست نقاطیکه فاصلهٔ آنها ازمرکز، بزرگتر از شعاع دایره باشد بنام قسمت های خارجی دایره یاد میگردد. شکل (2 - 5)



شکل (2 - 5)

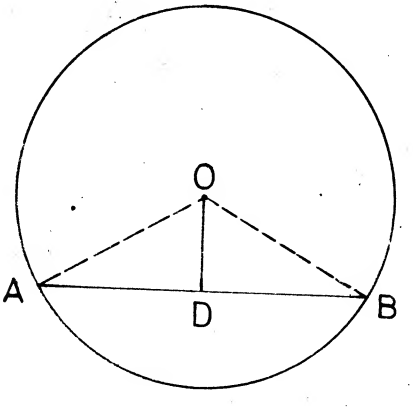
3 - 5 :- **وتر**: قطعه خطیکه شروع وانجام آن دونقطهٔ مختلف محیط دایره باشند. بنام وتر دایره یاد میشود.

1-3-5. **قضیه اول** :- هرگاه یک خط مستقیم که ازمرکز دایره گذشته وبانقطه وسطی وتریکه ازمرکز دایره نگذشته وصل شود بالای وتر مذکور عمود میباشد.

مفروض :- $\overline{AB}$ وتر دایرهٔ (O)

که ازمرکز نگذشته و (D).

نقطهٔ وسطی آن است.



شکل (3 - 5)

مطلوب :- می خواهیم ثبوت نمائیم که : $\overline{OD} \perp \overline{AB}$

ترسیم :- مرکز دایره را با نقاط A و B وصل می نمائیم .

ثبوت :- در مثلث های ADO و DOB روابط ذیل را داریم .

فرضیه ..... $\overline{AD} = \overline{BD}$

شعاع دایره ..... $\overline{OA} = \overline{OB}$

ضلع مشترک ..... $\overline{OD} = \overline{OD}$

از رابطهٔ بالا نوشته کرده می توانیم که : $\overset{\Delta}{ADO} \cong \overset{\Delta}{BDO}$

از انطباق پذیری مثلث های $\hat{ODA} = \hat{ODB}$ بدست میآید که این دو زاویه زوایای مجاوره متممه و مساوی همدیگر اند . بناً وسعت هرکدام آن 90° است.

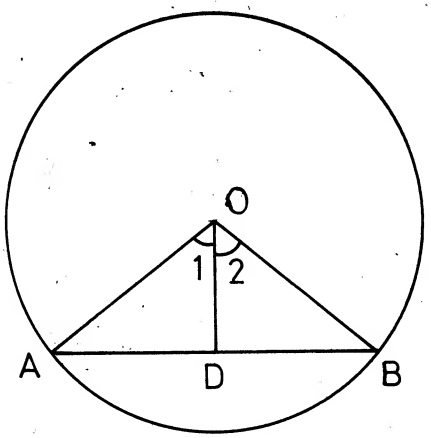
درنتیجه $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ می شود .

مثال درشکل (5 - 4) ، O مرکز دایره و D نقطهٔ وسطی $\overline{AB}$ است اگر $O_1 = O_2 = 45^\circ$ باشد وسعت زوایای A و B را معلوم نمائید .

حل : چون $\overline{OD}$ از مرکز گذشته و نقطهٔ وسطی $\overline{AB}$ را با مرکز وصل می نماید بناء

$\overline{OD} \perp \overline{AB}$ است

لذا $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$ است .



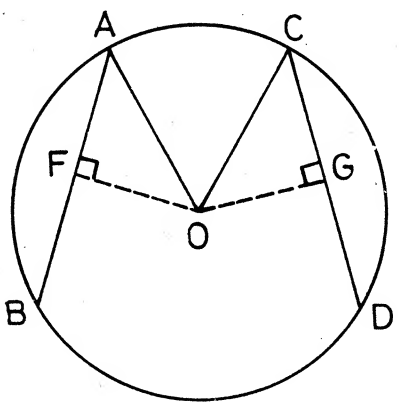
شکل (5 - 4)

5-3-2 . **قضیه دوم** :- هرگاه یک خط مستقیم از مرکز دایره گذشته و بالای یکی از وترهای دایره عمود باشد پس آن مستقیم وتر مذکور را تنصیف می نماید *

5-3-3 . **قضیه سوم** :- وترهای مساوی یک دایره به فاصله مساوی از مرکز آن دایره قرار دارند .

مفروض :- وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دایرهٔ (O) باهم مساوی اند .

مطلوب :- میخواهیم ثبوت نمائیم که وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ از مرکز دایره O به فاصله مساوی قرار دارند .



شکل (5-5)

ترسیم : از مرکز O عمودهای $\overline{OG}$ و $\overline{OF}$ را به ترتیب بالای AB و CD وصل می کنیم شکل (5-5)

ثبوت :- چون $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ است پس با ساس قضیه (5-3-2) $\overline{AB}$ را منصف می نماید یعنی .

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AB} \quad \cdots\cdots\cdots \text{I}$$

به همین ترتیب $\overline{OG} \perp \overline{CD}$ است. پس داریم که :

$$\overline{CG} = \frac{1}{2}\overline{CD} \quad \cdots\cdots\cdots \text{II}$$

با در نظر داشت $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، $\overline{AF} = \overline{CG}$ است .

---

* شاگردان ممتاز خود ثبوت نمایند .

درمثلث های قایم الزاویه AFO و CGO داریم که :

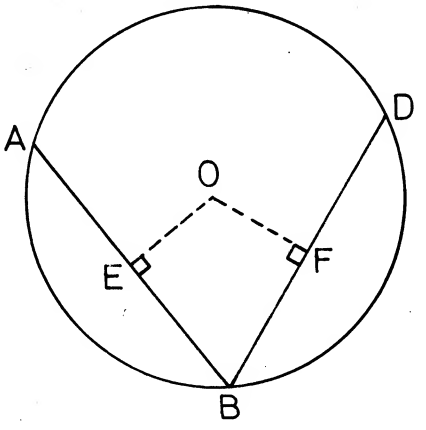
$$\overline{AF}=\overline{CG}$$

$$\overline{OA}=\overline{OC}$$

پس $\hat{AFO}$ و $\hat{CGO}$ انطباق پذیراند درنتیجه $\overline{OF}=\overline{OG}$ می شود . این بدین معنی است که وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ از مرکز به فواصل مساوی واقع اند.

مثال:- درشکل (5-6) $\overline{AB}=\overline{BD}=4cm$ و $\overline{OF}=1,3cm$ است طول $\overline{OE}$ را معلوم نمائید .

حل :- چون $\overline{AB}=\overline{BD}$ است بناً باساس قضیه (5-3-3) ، $\overline{OE}=1,3cm$ می باشد .



شکل (5-6)

تمرین (1 - 5):-

1 - شکل (5 - 7) را دیده بگوئید که جملات ذیل باساس کدام قضیه صحیح است .

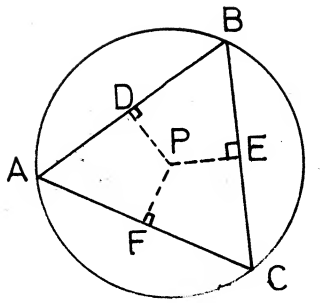
a - اگر $\overline{AC}=\overline{BC}$ باشدپس $\overline{PF}=\overline{PE}$ است.

b - $\overline{AF}=\overline{FC}$

c - اگر $\overline{AD}=\overline{BD}$ باشدپس $\overline{PD}\perp\overline{AB}$ است.

d - اگر $\overline{AF}=\overline{FC}$ باشدپس $\overline{PF}\perp\overline{AC}$ است.

e - اگر $\overline{AC}=\overline{AB}$ باشدپس $\overline{PF}=\overline{PD}$ است.

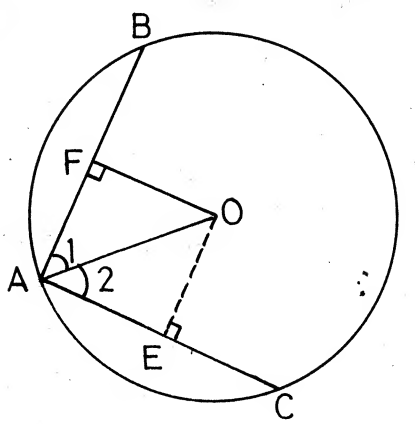


شکل (5-7)

f- اگر $\overline{PD}=\overline{PE}=\overline{PF}$ باشد درینصورت $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$ است.

2 - درشکل (5 - 8) $\overline{AB}=\overline{AC}$ و $\overline{OF}=\overline{OE}$ است.

ثبوت نما ئیدکه $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ میشود.



شکل (5 - 8)

1-3-1b* **قضیه دوم** :- مجموعه دو زاویه مجاوره ایکه به یکطرف یک مستقیم توسط قطع مستقیم دیگر بوجود آید مساوی به 180° می‌باشد.

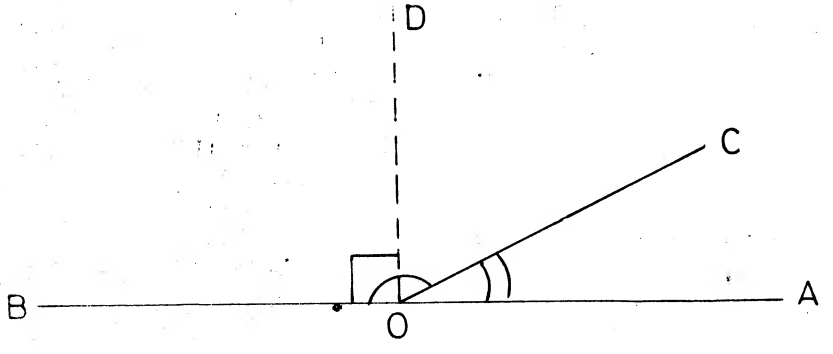
1- **شکل** :- در شکل (2 - 1) می بینیم که قطعه خط $\overline{AB}$ و $\overline{OC}$ زوایای مجاور $\hat{AOC}$ و $\hat{COB}$ را تشکیل داده اند.

2- **مفروض** :- $\overline{AB}$ و $\overline{OC}$ دو قطعه خطی اند که زوایای مجاور AOC و COB را به یکطرف خط مستقیم تشکیل نموده اند.

3- **مطلوب** :- می خواهیم ثبوت کنیم که

$$\hat{AOC} + \hat{COB} = 180^\circ$$

4- **ترسیم** :- برای اینکه مطلب را بدست آریم عمود OD را بالای قطعه خط $\overline{AB}$ در نقطه O رسم می کنیم.



شکل (2 - 1)

5 - **ثبوت** :- نظر به شکل (2 - 1) نوشته کرده می توانیم که :

$$\hat{DOB} + \hat{COD} + \hat{AOC} = \hat{COB} + \hat{AOC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

به همین ترتیب :

* و یا به عبارهٔ دیگر : وسعت زوایای مجاوره ایکه اضلاع خارجی شان به هم دوام یک خط مستقیم قرار داشته باشد مساوی به دو قایمه است.

"مترجم"

صنف هفت و بالاتر از آن با در نظر داشت شرایط حساس جهادی و زندگی مهاجرین تحت رهنمایی های دین مقدس اسلام و حفظ اساسات اصیل کلتور افغانی تحریر کرده و بعد از ارزیابی و اصلاحات لازم ذریعهٔ استادان لیسه های مختلف و دانشوران افغانی و کمشنری افغان کتابها چاپ شده و بطور رایگان به دسترس متعلمین و استادان مکاتب مهاجرین از طریق مؤسسات مربوطه آنها گذاشته شود امید است که خوانندگان محترم از روی همکاری نظریات مفید و ثمربخش شان را به مؤسسه تعلیم و تربیه آی. آر. سی اطلاع دهند به امید موفقیت و همکاری های بیشترتان.

ومن الله التوفیق

ادارهٔ.

مقدمه

این یک حقیقت آشکار است که متجاوزگران نه تنها مردم افغانستان را قتل عام نمودند بلکه تمام هستی علمی و مالی آنها را از بین بردند. خانه ها، سرک ها مزرعه ها، مساجد، مدارس، مکاتب را ویران کردند و مردم را مجبور به هجرت نمودند، جوانان و اطفال را از تعلیم و تربیه محروم ساختند مگر به فضل خداوند ج، تنظیم های مجاهدین و مهاجرین از ابتدا متوجه رفع این نقیصه شدند و بخاطر تربیه اولاد این قوم غیرتمند مکاتب را افتتاح نمودند که درین ساحه دولت پاکستان نیز از طریق کمشنری و مؤسسات خیریه به خاطر تعلیم و تربیه اطفال مجاهد و مهاجر خدمات قابل قدر انجام دادند.

به همین ترتیب طبق تصمیم مرکز تعلیمی آی، آر، سی برای افغان ها که در ساحهٔ ساینس و ریاضی کتب درسی را برای تعلیم و تربیهٔ اولاد مهاجر و مجاهد مردم مؤمن و مسلمان افغانستان تهیه میدارد ما هم نوشتن کتاب - هندسهٔ صنف هشتم را به عهده گرفتیم و به کمک خداوند بزرگ ج، این کتاب را تهیه و در دسترس خوانندگان گرامی میگذاریم.

کتاب هندسهٔ صنف هشتم پنج فصل دارد، در فصل اول آن اصول و اساسات اقلیدس که تحراب هندسه مسطح را تشکیل میدهد با الفاظ بسیار ساده و عام فهم تهیه شده و قضایای مربوط در روشنائی مثال ها تشریح شده است، فصل دوم و سوم کتاب از خواص موازات، مثلث ها و قضایای مربوط

انها بحث میکند . درفصل چهارم و پنجم چار ضلعی ها و دایره با خواص مربوط و قضایای شان با آوردن مثال های عملی تشریح شده امیدواریم که این کتاب برای اطفال غیر متمند افغان مفید ثابت شود .

قبل از چاپ شدن این کتاب زحماتی را که اعضای محترم آی، آر، سو هریک غلام سخی وغلام دستگیر« فضل یار» واستاد سایس لیسهٔ آی ، آر ، سی، حبیب الله « راحل » ، و محمد انعام معلم لیسهٔ کمشنری درقسمت خواندن کتاب متقبل شده اند . از صمیم قلب تشکر میکنم .

همچنان از غلام محمد خطاط وفرید ون نوری « رسام که درنوشتن ورسامی این کتاب کوشش نموده اند تشکر مینمائیم .

ازخوانندگان محترم آرزومندم که نظریات وانتقادات خودرا جهت اصلاح کتاب بفرستند .

ومن الله توفیق

دوکتور عبدالواحد « حسنی »

شاه محمود « ستانیزی »

فهرست

عنوان		صفحه
فصل اول	اصول اقلیدس وقضیه	۱
	اصول اقلیدس	۱
	اصول موضوعه	۱
	اصول متعارفه	۱
	قضیه	۳
	ثبوت قضیه	۵
	ثبوت مستقیم	۷
	قضیه اول	۷
	قضیه دوم	۹
	ثبوت غیرمستقیم	۱۰
	قضیه	۱۰
	قضایای معکوس	۱۲
	اصل پنجم اقلیدس واهمیت آن درتاریخ ریاضی	۱۳
	تمرینات فصل اول	۱۵
فصل دوم:	موازات	۱۸
	خطوط موازی	۱۸
	خطوط قاطع	۱۸

فهرست

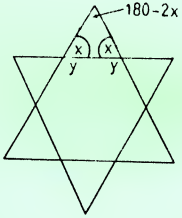
عنوان	صفحه
زوایای بین دوخط ویک قاطع	۱۹
زوایای خارجی وداخلی	۲۰
زوایای متبادله	۲۰
زوایای متوافقه	۲۰
تمرین	۲۰
شروط موازی بودن دوخط مستقیم	۲۱
قضیه اول	۲۱
قضیه دوم	۲۲
قضیه سوم	۲۳
تمرین	۲۵
قضیه اول	۲۶
خواص زوایای که یک قاطع همرای خطوط موازی می سازد	۲۶
قضیه دوم	۲۸
قضیه سوم	۲۹
تمرین	۳۰
خواص زوایائیکه اضلاع آن‌ها موازی وهم جهت ویا موازی ومخالف الجهت باشد	۳۲
قضیه اول	۳۲

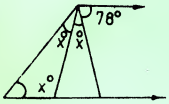
فهرست

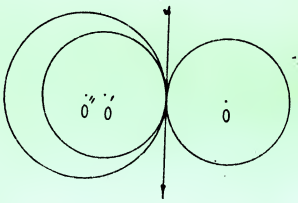
عنوان	صفحه
قضیه اول	۵۷
قضیه دوم	۵۸
تمرین	۶۰
تمرینات عمومی فصل سوم	۶۲
فصل چهارم: چهارضلعی ها	۶۶
چهارضلعی	۶۶
اقسام چهارضلعی	۶۷
متوازی الاضلاع	۶۷
مستطیل	۶۷
مربع	۶۸
معین یا لوزی	۶۸
ذوذنقه یا محرف	۶۹
شبه محرف ذ	۶۹
زوایای داخلی چهارضلعی ها	۶۹
قضیه اول	۷۰
قضیه دوم	۷۲
قضیه سوم	۷۳

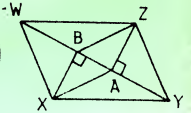
ہندسہ

صنف ۸









ڈکٹر عبدالواحد "حسنی"
شاہ محمود "ستانیزی"

مترجم : انجنیر عبدالمقیم

پشاور جوزا ۱۳۶۷

فهرست

عنوان	صفحه
قضیه دوم	۳۳
قضیه سوم	۳۵
تمرین	۳۶
تمرینات عمومی فصل دوم	۳۸
فصل سوم: خواص اضلاع وزوایای مثلث	۴۴
رابطه بین اضلاع وزوایای یک مثلث	۴۴
قضیه اول	۴۴
قضیه دوم	۴۵
قضیه سوم	۴۷
قضیه چهارم	۴۸
تمرین	۵۰
خواص اضلاع مثلث	۵۲
قضیه	۵۲
مجموعهٔ وسعت زوایای داخلی یک مثلث	۵۴
قضیه	۵۴
تمرین	۵۵
خواص زوایای خارجی مثلث	۵۶

فهرست

عنوان	صفحه
تمرین	۷۵
زوایای خارجی چهارضلعی‌ها	۷۷
قضیه	۷۷
تمرین	۷۹
خواص اضلاع چهارضلعی‌ها	۸۰
قضیه اول	۸۰
قضیه دوم	۸۱
تمرین	۸۲
خواص قطرهای چهارضلعی‌ها	۸۳
قضیه اول	۸۳
قضیه دوم	۸۵
قضیه سوم	۸۶
تمرینات عمومی فصل چهارم	۸۸
فصل پنجم: دایره	۹۴
دایره	۹۴
قسمت‌های داخلی وخارجی دایره	۹۵
وتر	۹۵

دکتور عبدالواحد چسنی
شاه محمود ستانیزی

هندسه

برای صنف هشتم

مرکز انکشافی تعلیم و تربیهٔ
افغانها
آی. آر. سی

مترجم: انجنیر عبدالمقیم

پشاور: جوزا ۱۳۶۷

Dr. A.WAHED HASSANI

SHAH MAHMOOD STANIZAI

GEOMETRY

For 8th Grade

INTERNATIONAL RESCUE COMMITTEE

Development Center for Afghan Education

D C A E Publication

Peshawar

May 1988

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

این نشریه مخصوص متعلمان مهاجر و مجاهد سربکف راه آزادی افغانستان عزیز بوده و طور رایگان به دسترس شان قرار می گیرد. لذا خرید و فروش آن ممنوع است. حق چاپ مربوط مرکز انکشافی تعلیم و تربیه افغانها بوده و چاپ آن به اجازه مرکز مذکور صورت خواهد گرفت.

پیشگفتار

مدت چندین سال میشود که مؤسسه خیریه آی.آر.سی خدمات صحی را برای مهاجرین افغان در پاکستان انجام میدهد بنا بر نیازمندی های روز افزون تعلیم وتربیه تنظیم های جهادی ، مؤسسات مختلف خیریه وحکومت پاکستان سعی ورزیده تا پیشبرد یك سلسله خدمات مثمر تعلیم وتربیه را برای اولاد معصوم مهاجرین و مجاهدین افغان عهده دار شوند . مؤسسه خیریه آی.آر.سی نیز به نوبه خود در اوایل ۱۹۸۵ تصمیم گرفت تا در پهلوی خدمات صحي خدمات لازم تعلیم وتربیه را بخاطر ارتقاء سطح دانش اولاد مهاجرین و مجاهدین افغان تقدیم دارد بعداز انجام یك سلسله تحقیقات و مشوره ها با دانشوران و استادان افغانی چنین نتیجه بدست آمد که بمیان آوردن یك مرکز تعلیمی و تربیوی برای استادان لیسه ها و مکاتب متوسطه و تحریر کتب درسی برای صنوف هفتم و بالاتر از آن اشد ضرورت میباشد .

هدف این مؤسسه عبارت از کمك به اولاد افغان بدون با در نظر داشت هرنوع تبعیض بوده مؤسسه سعی می ورزد تا پالیسی بیطرفانه خود را در مسایل سیاسی وتنظیمی حفظ کرده بصورت مساویانه مصدر خدمات برای تمام تنظیم ها و مهاجرین افغان گردد . در پهلوی مشکلات دیگر تعلیمی عدم موجودیت کتاب های درسی خاصتاً در صنوف عالی یکی از پرابلم های عمده بوده که دامن گیر مکاتب مهاجرین افغان میباشد . چون مؤسسه در بخش مضامین ساینس و ریاضی استادان ورزیده و تسهیلات لازم داشته لذا تصمیم اتخاذ گردید تا کتابهای ریاضی و ساینس را برای